HOLOMORPHE ABBILDUNGEN AUF MANNIGFALTIGKEITEN MIT NICHT-NEGATIVER KODAIRA-DIMENSION

STEFAN KEBEKUS

ZUSAMMENFASSUNG. We describe the structure of the space of holomorphic surjections onto varieties of non-negative Kodaira dimension (joint with J. M. Hwang and T. Peternell).

INHALTSVERZEICHNIS

1. EINFÜHRUNG

Es sei $f : X \to Y$ ein surjektiver Morphismus zwischen normalen komplex-projektiven Varietäten. Eine klassisches Problem der komplexen Geometrie fragt nach Kriterien für die (nicht-)Existenz von Deformationen des Morphismus f, wobei die Varietäten X und Y festgehalten werden. Allgemeiner fragt man nach einer Beschreibung der Zusammenhangskomponente $\mathrm{Hom}_f(X,Y) \subset \mathrm{Hom}(X,Y)$ des Raumes der holomorphen Abbildungen.

Ein bekanntes Ergebnis in dieser Richtung sagt etwa, dass die Automorphismengruppe einer komplexen Mannigfaltigkeit vom allgemeinen Typ diskret ist. Allgemeiner gilt, dass surjektive Morphismen zwischen projektiven Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ stets infinitesimal starr sind, dass die betreffenden Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{Hom}(X,Y)$ also reduzierte Punkte sind. Ähnlich Fragen wurden im komplex-analytischen Zusammenhang von Borel und Narasimhan [BN67] untersucht.

Ich möchte in diesem Seminarbeitrag über eine gemeinsame Arbeit [HKP03] mit Jun-Muk Hwang und Thomas Peternell berichten, in der wir diese klassischen Resultate verallgemeinern und den Raum der surjektiven Morphismen für eine große Klasse von Mannigfaltigkeiten vollständig beschreiben. Die vorliegende Ausarbeitung enthält keine neuen Ergebnisse, stellt die Beweisidee aber in größerer Ausführlichkeit als in [HKP03] dar.

Date: 19. März 2004.

Diese Arbeit ist eine Ausarbeitung von eines Vortrags in Y. Tschinkels Seminar in Göttingen. Für die Einladung zum Vortrag möchte ich mich bei Y. Tschinkel bedanken. Die Arbeit an dem Originalartikel [HKP03] wurde aus Mitteln des Schwerpunktprogrammes “Globale Methoden in der komplexen Geometrie” der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützt.

2. Formulierung des Ergebnisses

Ein surjektiver Morphismus $f : X \to Y$ hat auf jeden Fall dann Deformationen, wenn die Zielvarietät Y eine positiv-dimensionale Automorphismengruppe hat, denn die Kompositionsabbildung

$$f^\circ : \begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}^0(Y) & \to & \mathrm{Hom}_f(X,Y) \\ g & \mapsto & g \circ f \end{array} \tag{2.1}$$

ist offenbar injektiv. Die naive Vermutung, dass alle Deformationen von f von Automorphismen der Zielvarietät kommen, ist natürlich falsch. Das Hauptresultat der Arbeit zeigt aber, dass die Vermutung *fast* richtig ist, wenn die Zielvarietät nicht von rationalen Kurven überdeckt ist: die Abbildung f faktorisiert stets über eine Zwischenvarietät Z, deren Automorphismengruppe alle Deformationen induziert. Die korrekte Formulierung des Resultates lautet wie folgt:

Satz 2.1 (Hwang-Kebekus-Peternell [HKP03])**.** *Es sei $f : X \to Y$ ein surjektiver Morphismus zwischen normalen komplex-projektiven Varietäten, und Y sei nicht von rationalen Kurven überdeckt. Dann gibt es eine Faktorisierung von f,*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & Z \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd},$$

so dass gilt:

(1) *Der Morphismus β ist außerhalb der Singularitäten von X und Y unverzweigt, und*
(2) *die natürliche Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}^0(Z)\big/\mathrm{Deck}(Z/Y) & \to & \mathrm{Hom}_f(X,Y) \\ g & \mapsto & \beta \circ g \circ \alpha \end{array}$$

ist ein Isomorphismus.

Insbesondere folgt, dass alle surjektiven Morphismen nach Y unobstruiert deformieren, und dass die zugehörigen Komponenten von $\mathrm{Hom}(X,Y)$ glatte Abelsche Varietäten sind.

Als Korollar, das wir hier nicht beweisen, halten wir noch fest:

Korollar 2.2 (Hwang-Kebekus-Peternell [HKP03])**.** *Wenn unter den Voraussetzungen des Theorems 2.1 die Zielvarietät Y noch glatt ist, dann besitzt Y eine endliche, unverzweigte Überlagerung der Form $T \times W$, wobei T ein Torus der Dimension $\dim T = h^0(X, f^*(T_Y))$ ist. Zusätzlich gilt:*

$$\dim \mathrm{Hom}_f(X,Y) \leq \dim Y - \kappa(Y),$$

wobei $\kappa(Y)$ die Kodairasche Dimension bezeichnet. □

Nicht ganz präzise, aber vielleicht einfacher zu merken, fassen wir die Ergebnisse der Arbeit so zusammen:

- Deformationen von surjektiven Morphismen sind stets unobstruiert, es sei denn, es gibt einen klaren geometrischen Grund: die Zielvarietät ist von rationalen Kurven überdeckt.
- Wenn das Ziel nicht mit rationalen Kurven überdeckt ist, kommen alle Deformationen von Automorphismen von einer Zwischenvarietät.

3. Bekannte Tatsachen

Des Beweis des Satzes 2.1 verwendet eine Reihe von bekannten Tatsachen, die wir der Bequemlichkeit halber hier noch einmal zusammengestellt haben.

3.1. **Der Tangentialraum des Hom-Schemas.** Die universelle Eigenschaft des Raumes der Morphismen liefert eine kanonische Identifikation des Zariski-Tangentialraumes $T_{\mathrm{Hom}}|_f$ von $\mathrm{Hom}(X, Y)$ an der Stelle f mit dem Vektorraum $H^0(X, f^*(T_Y))$, siehe [Kol96, I. thm. 2.16].

Notation 3.1. Die Elemente von $H^0(X, f^*(T_Y))$ bezeichnet man als "infinitesimale Deformationen von f". Man nennt den Morphismus f "infinitesimal starr" wenn $h^0(X, f^*(T_Y)) = 0$ ist.

3.2. **Beschreibung von Überlagerungen durch Garben.** In diesem Abschnitt sei $f : X \to Y$ eine (möglicherweise verzweigte) Überlagerung von komplexen Mannigfaltigkeiten. Dann ist bekannt, dass die Garbe $f_*(\mathcal{O}_X)$ von $\mathcal{O}_Y$-Algebren ein Vektorbündel auf Y liefert, [Har77, III chapt. 9]. Weiter gilt: $X \cong \mathbf{Spec}(f_*(\mathcal{O}_X))$.

Wenn Z eine Zwischenvarietät ist, über die f faktorisiert,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & Z \arrow[r, "b"'] & Y \end{tikzcd} ,$$

dann ist $b_*(\mathcal{O}_Z)$ eine kohärente Unteralgebra von $f_*(\mathcal{O}_X)$. Anders herum gehört zu jeder kohärenten Untergarbe von $\mathcal{O}_Y$-Moduln $\mathcal{F} \subset f_*(\mathcal{O}_X)$, die abgeschlossen unter der Multiplikation

$$\mu : f_*(\mathcal{O}_X) \otimes f_*(\mathcal{O}_X) \to f_*(\mathcal{O}_X)$$

ist, eine Zwischenvarietät $Z := \mathbf{Spec}(\mathcal{F})$ über die die Abbildung f faktorisiert, so dass $\mathcal{F} \cong b_*(\mathcal{O}_Z)$ ist, [Har77, II. ex. 5.17].

Wenn die Garbe $\mathcal{F}$ zusätzlich noch lokal frei ist, und ihre Einschränkung auf jeder allgemeine Kurve in Y Grad 0 hat, dann ist Z eine Mannigfaltigkeit, und die Abbildung $b : Z \to Y$ ist unverzweigt, [PS00, lem. 1.13].

3.3. **Die Harder-Narasimhan-Filtrierung.** In diesem Abschnitt sei Y eine komplex-projektive Mannigfaltigkeit, $\mathcal{E}$ eine kohärente Garbe auf Y und $H \in \mathrm{Pic}(Y)$ ein amples Geradenbündel. Alle Resultate gelten auch für normale Kähler-Varietäten, aber wir benötigen diesen Grad von Allgemeinheit hier nicht.

Definition 3.2. *Die Zahl*

$$\mu_H(\mathcal{E}) := \frac{c_1(\mathcal{E}) \cdot H^{\dim(Y)-1}}{\mathrm{Rang}(\mathcal{E})}$$

nennt man die "Steigung von $\mathcal{E}$ bezüglich H". Die kohärente Garbe $\mathcal{E}$ heißt "semistabil bezüglich H", wenn für jede kohärente Untergarbe $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ die Ungleichung

$$\mu_H(\mathcal{G}) \leq \mu_H(\mathcal{E})$$

gilt

Satz 3.3 (Harder-Narasimhan [HN75])**.** *Es gibt eine eindeutige Filtrierung der Garbe $\mathcal{E}$ durch kohärente Untergarben*

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_{s-1} \subset \mathcal{E}_s = \mathcal{E},$$

so dass alle Quotienten $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ *stabil bezüglich* H *sind, und so, dass*

$$\mu_H\left(\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0\right) > \cdots > \mu_H\left(\mathcal{E}/\mathcal{E}_{s-1}\right)$$

gilt. □

Eines der wesentlichen Resultate über die Harder-Narasimhan-Filtrierung vergleicht die Filtrierung einer kohärenten Garbe $\mathcal{E}$ auf X mit der Filtrierung der Einschränkung $\mathcal{E}|_C$ von $\mathcal{E}$ auf eine hinreichend allgemeine Kurve $C \subset Y$.

Satz 3.4 (Mehta-Ramanathan [MR82]). *Es sei* $\mathcal{E}_i$ *die Harder-Narasimhan-Filtrierung einer kohärenten Garbe* $\mathcal{E}$ *auf* X*. Wenn* $n_1, \ldots, n_{\dim X-1}$ *hinreichend große Zahlen sind, und* $C \subset X$ *eine glatte Kurve, die als schementheoretischer Durchschnitt allgemeiner Divisoren* $D_i \in |n_i H|$ *entsteht, dann ist die Einschränkung der Harder-Narasimhan-Filtrierung,*

$$0 = \mathcal{E}_0|_C \subset \mathcal{E}_1|_C \subset \cdots \subset \mathcal{E}_{s-1}|_C \subset \mathcal{E}_s|_C = \mathcal{E}|_C$$

exakt die Harder-Narasimhan-Filtrierung der eingeschränkten Garbe $\mathcal{E}|_C$. □

3.4. **Positivitätsbegriffe für Vektorbündel.** In diesem Abschnitt sei $\mathcal{E}$ ein Vektorbündel auf einer komplex-projektiven Mannigfaltigkeit Y. Weiter sei $Y := \mathbb{P}(\mathcal{E})$ das zugehörige Bündel von projektiven Räumen und $\mathcal{L} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \in \operatorname{Pic}(Y)$ das tautologische Geradenbündel.

Definition 3.5. *Man nennt* $\mathcal{E}$ *ample beziehungsweise nef, wenn* $\mathcal{L}$ *ample beziehungsweise nef ist.*

Beispiel 3.6. Sei $Y = \mathbb{P}_1$ und

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1\ldots n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_i).$$

Dann ist $\mathcal{E}$ genau dann ample, wenn für alle i gilt, dass $a_i > 0$ ist. Das Bündel $\mathcal{E}$ genau dann nef, wenn alle $a_i \geq 0$ sind.

Ample und nefe Vektorbündel werden in [Har66], [Har70] und [DPS94] ausführlich diskutiert. Wir stellen hier die für uns wesentlichen Ergebnisse zusammen.

Fakt 3.7. Quotienten von amplen Vektorbündeln sind ample [Har70, prop. 1.7]. Quotienten von nefen Vektorbündeln sind nef [DPS94, prop. 1.15(i)]. □

Fakt 3.8. Sei Y eine glatte Kurve. Dann gilt:

(1) Ample Vektorbündel haben positiven Grad. Nefe Vektorbündel haben nicht-negativen Grad [DPS94, prop. 1.14].
(2) Wenn das Vektorbündel $\mathcal{E}$ nef ist und Grad 0 hat, dann ist auch das duale Bündel $\mathcal{E}^*$ nef [DPS94, prop. 1.15(iii)].
(3) Wenn das Vektorbündel $\mathcal{E}$ nef, aber nicht ample ist, dann existiert ein amples Unterbündel $\mathcal{V} \subset \mathcal{E}$, so dass der Quotient $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ nef ist und Grad 0 hat. Das Bündel $\mathcal{V}$ ist maximal in dem Sinne, dass jedes ample Unterbündel $\mathcal{V}' \subset \mathcal{E}$ in $\mathcal{V}$ enthalten ist, [PS00, lem. 2.3] □

Fakt 3.9. In der Situation von Fakt 3.8.(3) zeigt eine elementare Rechnung folgendes: wenn $H \in \operatorname{Pic}(Y)$ ein amples Geradenbündel ist, dann tritt das maximale ample Unterbündel $\mathcal{V}$ in der Harder-Narasimhan-Filtrierung von $\mathcal{E}$ bezüglich H auf.

4. BEWEISIDEE

Schritt 1: Vereinfachende Annahme. Weil wir hier nur die Kernidee des Beweises zeigen wollen, nehmen wir vereinfachend an, dass der surjektive Morphismus $f : X \to Y$ eine endliche, aber möglicherweise verzweigte, Überlagerung von komplex-projektiven Mannigfaltigkeiten ist.

Schritt 2: Die Tangentialabbildung von f°. Wir betrachten noch einmal die natürliche Abbildung $f^\circ : \mathrm{Aut}^0(Y) \to \mathrm{Hom}_f(X, Y)$, die auf Seite 2 in (2.1) definiert wurde. Die universellen Eigenschaften des Raumes der Morphismen $\mathrm{Hom}(X, Y)$ und der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}^0(Y)$ liefern die folgende Beschreibung der Tangentialabbildung von f° an der Stelle $e \in \mathrm{Aut}^0(Y)$,

$$Tf^\circ|_e : T_{\mathrm{Aut}(Y)}|_e \to T_{\mathrm{Hom}}|_f. \tag{4.1}$$

Unter den natürlichen Identifikationen

$$T_{\mathrm{Aut}(Y)}|_e \cong H^0(Y, T_Y) \quad \text{und} \quad T_{\mathrm{Hom}}|_f \cong H^0(X, f^*(T_Y))$$

wird die Tangentialabbildung (4.1) zur Rückzugsabbildung

$$Tf^\circ|_e = f^* : H^0(Y, T_Y) \to H^0(X, f^*T_Y). \tag{4.2}$$

Fazit 4.1. Die Abbildung (4.1) ist injektiv. Wenn die Rückzugsabbildung (4.2) surjektiv ist, wenn also jede infinitesimale Deformation von f von einem Vektorfeld auf Y kommt, dann liefert die Abbildung (4.1) einen Isomorphismus der Zariski-Tangentialräume.

Die obigen Überlegungen geben auch eine Beschreibung der Tangentialabbildung an einem beliebigen Punkt $g \in \mathrm{Aut}^0(Y)$:

$$Tf^\circ|_g = (g \circ f)^* : H^0(Y, T_Y) \to H^0(X, (g \circ f)^*(T_Y)).$$

Weil die Abbildung $g : Y \to Y$ aber überall maximal Rang hat, erkennen wir, dass der Rang der Tangentialabbildung Tf° auf ganz $\mathrm{Aut}^0(Y)$ konstant ist. Eine elementare Argumentation liefert dann das folgende Ergebnis.

Fazit 4.2. Wenn die Rückzugsabbildung (4.2) surjektiv ist, dann ist die Kompositionsabbildung $f^\circ : \mathrm{Aut}^0(Y) \to \mathrm{Hom}_f(X, Y)$ isomorph. In diesem Fall ist der Beweis des Satzes 2.1 beendet, wenn wir $Z := Y$ setzen.

Zentraler Schritt 3: Konstruktion einer Überlagerung. Nach den Überlegungen aus Schritt 2 können wir annehmen, dass es einen Schnitt $\sigma \in H^0(X, f^*(T_Y))$ gibt, der *nicht* von einem Vektorfeld auf Y kommt. Wir werden in diesem Abschnitt eine unverzweigte Überlagerung von Y bauen, die den surjektiven Morphismus f faktorisiert. Die wesentlichen Hilfsmittel dabei sind die folgende Negativitätsaussage von Lazarsfeld für das Vektorbündel $f_*(\mathcal{O}_X)$ und die Charakterisierung von unigeregelten Mannigfaltigkeiten von Miyaoka, die als konkurrierende Positivitätsaussage für $f_*(\mathcal{O}_X)$ gesehen werden kann.

Satz 4.3 (Lazarsfeld [Laz80], [PS00, **thm. A**]). *Die Spurabbildung $tr : f_*(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_Y$ liefert eine natürliche Spaltung*

$$f_*(\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{E}^*,$$

wobei das Vektorbündel $\mathcal{E}$ die folgende Positivitätseigenschaft hat: Wenn $C \subset Y$ eine Kurve ist, die nicht im Verzweigungsort liegt, dann ist $\mathcal{E}|_C$ nef. □

Die Projektionsformel liefert demnach eine Identifikation

$$H^0(X, f^*(T_Y)) = H(Y, f_*(f^*(T_Y))) = H^0(Y, T_Y) \oplus H^0(Y, \mathcal{E}^* \otimes T_Y)$$

Weil der Schnitt σ nicht in der Komponente $H^0(Y, T_Y)$ liegt, erhalten wir also eine nicht-triviale Abbildung $\sigma : \mathcal{E} \to T_Y$.

Satz 4.4 (Miyaoka [Miy87], [Kol92, **thm. 9.0.1**]). *Sei $C \subset Y$ ein Kurve, die als allgemeiner vollständiger Durchschnitt von sehr amplen Divisoren auftritt. Dann hat das Vektorbündel $\operatorname{Bild}(\sigma)|_C$ semi-negativen Grad. Insbesondere ist $\mathcal{E}|_C$ nicht ample.* □

Als Konsequenz halten wir Folgendes fest.

Fazit 4.5. Sei $H \in \operatorname{Pic}(Y)$ ample und $C \subset Y$ eine allgemeine Kurve wie im Satz 3.4 von Mehta-Ramanathan. Dann ist das Vektorbündel $\mathcal{E}|_C$ nef, aber nicht ample.

Notation 4.6. Wir halten für den Rest des Beweises das ample Bündel $H \in \operatorname{Pic}(Y)$ fest. Sei C eine Kurve wie in Fazit 4.5, und $\mathcal{V}_C \subset \mathcal{E}|_C$ das —nach Fakt 3.8.(3) existierende— maximale ample Unterbündel. Weiter sei $\mathcal{F}_C \subset \mathcal{E}^*|_C$ der Kern der Abbildung $\mathcal{E}^*|_C \to \mathcal{V}_C^*$. Man beachte, dass $\mathcal{F}_C$ dual zum Quotienten $\mathcal{E}|_C \big/ \mathcal{F}_C$ ist, also nach Fakt 3.8.(2) wieder nef ist und Grad 0 hat.

Mit diesem Vorbereitungen werden wir die gesuchte Faktorisierung jetzt zunächst über der Kurve C definieren, und dann schließlich auf ganz Y ausdehnen.

Beobachtung 4.7. Das Untervektorbündel $\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{F}_C \subset f_*(\mathcal{O}_x)|_C$ ist abgeschlossen unter der Multiplikationsabbildung

$$\mu : f_*(\mathcal{O}_X) \otimes f_*(\mathcal{O}_X) \to f_*(\mathcal{O}_X),$$

denn die zugehörende Abbildung

$$\mu' : \underbrace{(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{F}_C) \oplus (\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{F}_C)}_{\text{grad } 0,\text{nef}} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{E}^*|_C \big/ \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{F}_C}_{\cong \mathcal{V}_C^*, \text{ anti-ample}}$$

ist nach Fakt 3.7 notwendigerweise $= 0$.

Das Untervektorbündel $\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{F}_C \subset f_*(\mathcal{O}_x)|_C$ liefert also eine Faktorisierung der eingeschränkten Abbildung $f|_C : f^{-1}(C) \to C$ über eine unverzweigte Überlagerung von C. Um nun diese Überlagerung von C auf ganz Y auszudehnen, genügt es, das maximal ample Unterbündel $\mathcal{V}_C \subset \mathcal{E}|_C$ derart zu einem Unterbündel $\mathcal{V} \subset \mathcal{E}$ auszudehnen, dass für jede Kurve C', die wie im Satz 3.4 als allgemeiner vollständiger Durchschnitt von sehr amplen Divisoren auftritt, die Einschränkung $\mathcal{V}|_{C'} \subset \mathcal{E}|_{C'}$ exakt das maximale ample Unterbündel von $\mathcal{E}|_{C'}$ ist. Das ist aber nach Fakt 3.9 immer möglich, weil das (eindeutige) maximale ample Unterbündel $\mathcal{V}_C \subset \mathcal{E}|_C$ ein Teil der (eindeutigen) Harder-Narasimhan-Filtrierung von $\mathcal{E}|_C$ ist, die sich nach dem Satz 3.4 von Mehta-Ramanathan zur Harder-Narasimhan-Filtrierung von $\mathcal{E}$ auf ganz Y fortsetzt.

Fazit 4.8. Wenn die Rückzugsabbildung $H^0(Y, T_Y) \to H^0(X, f^*(T_Y))$ nicht surjektiv ist, dann gibt es eine Faktorisierung von f,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & Y^{(1)} \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd},$$

wobei β eine unverzweigte Überlagerung ist.

Schritt 4: Beweisende. Falls die Rückzugsabbildung $H^0(Y, T_Y) \to H^0(X, f^*(T_Y))$ nicht surjektiv ist, haben wir im Beweisschritt 3 eine Faktorisierung von f über eine unverzweigte Überlagerung $\beta : Y^{(1)} \to Y$ konstruiert. Wegen der Unverzweigtheit gilt natürlich $f^*(T_Y) = \alpha^*(T_{Y^{(1)}})$.

Jetzt prüfen wir wieder, ob die Rückzugsabbildung

$$\alpha^* : H^0\left(Y^{(1)}, T_{Y^{(1)}}\right) \to H^0(X, f^*(T_Y))$$

surjektiv ist.

- **Falls Ja:** Nach den Überlegungen aus Beweisschritt 2, ist der Beweis beendet, indem wir $Z := Y^{(1)}$ setzen.
- **Falls Nein:** Dann wiederholen wir Beweisschritt 3 für die Abbildung $\alpha : X \to Y^{(1)}$ anstelle der Abbildung $f : X \to Y$.

Auf diese Weise konstruieren wir eine Folge von unverzweigten Überlagerungen

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[rrrrr, bend left, "f"] & Y^{(d)} \arrow[r] & Y^{(d-1)} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y^{(1)} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Dieser Prozess muss aber nach endlich vielen Schritten abbrechen, weil die Anzahl der Blätter der Abbildung f endlich ist. Das beendet den Beweis des Theorems 2.1 unter der vereinfachenden Annahme, dass f eine endliche Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten ist.

5. Offene Fragen

Der Beweis benutzt an zentraler Stelle die Charakterisierung unigeregelter Varietäten von Miyaoka. Der Satz von Miyaoka gilt aber nur für komplex-projektive Varietäten. Dennoch scheint es, als könnte der Satz 2.1 in allgemeineren Situationen richtig sein. Insbesondere fragen wir:

- Gilt der Satz 2.1 auch für projektive Varietäten, die über einem Körper positiver Charakteristik definiert sind?
- Gilt der Satz 2.1 auch für Kähler-Mannigfaltigkeiten oder Kählersche komplexe Räume?

Satz 2.1 kann auch so interpretiert werden: alle Obstruktionen zur Deformation von surjektiven Morphismen kommen von rationalen Kurven auf der Zielvarietät. Kann man diese Aussage präzisieren? Gibt es ein Analogon zu Satz 2.1 für Zielvarietäten, die unigeregelt, aber nicht rational zusammenhängend sind?

Literatur

[BN67] Armand Borel and Raghavan Narasimhan. Uniqueness conditions for certain holomorphic mappings. *Invent. Math.*, 2:247–255, 1967.

[DPS94] Jean-Pierre Demailly, Thomas Peternell, and Michael Schneider. Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles. *J. Algebraic Geom.*, 3(2):295–345, 1994.

[Har66] R. Hartshorne. Ample vector bundles. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 29:63–94, 1966.

[Har70] Robin Hartshorne. *Ample subvarieties of algebraic varieties*. Notes written in collaboration with C. Musili. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 156. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[HKP03] Jun-Muk Hwang, Stefan Kebekus, and Thomas Peternell. Holomorphic maps onto varieties of non-negative Kodaira dimension. Preprint math.AG/0307220, Juli 2003.

[HN75] Günther Harder and M. S. Narasimhan. On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves. *Math. Ann.*, 212:215–248, 1974/75.

[Kol92] János Kollár, editor. *Flips and abundance for algebraic threefolds*. Société Mathématique de France, Paris, 1992. Papers from the Second Summer Seminar on Algebraic Geometry held at the University of Utah, Salt Lake City, Utah, August 1991, Astérisque No. 211 (1992).

[Kol96] János Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Laz80] Robert Lazarsfeld. A Barth-type theorem for branched coverings of projective space. *Math. Ann.*, 249(2):153–162, 1980.

[Miy87] Yoichi Miyaoka. The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety. In *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, volume 10 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 449–476. North-Holland, Amsterdam, 1987.

[MR82] Vikram Bhagvandas Mehta and Annamalai Ramanathan. Semistable sheaves on projective varieties and their restriction to curves. *Math. Ann.*, 258(3):213–224, 1981/82.

[PS00] Thomas Peternell and Andrew J. Sommese. Ample vector bundles and branched coverings. *Comm. Algebra*, 28(12):5573–5599, 2000. With an appendix by Robert Lazarsfeld, Special issue in honor of Robin Hartshorne.

MATHEMATICHES INSTITUT, UNIVERSITÄT ZU KÖLN, WEYERTAL 86–90, D-50931 KÖLN
E-mail address: `stefan.kebekus@math.uni-koeln.de`
URL: `http://www.mi.uni-koeln.de/˜kebekus`