**Lemma 1.3.2** Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ unterschiedliche Eigenwerte von $f$ und $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ seien zugehörende Eigenvektoren. Dann ist $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d\}$ linear unabhängig.

Beweis mit Induktion nach $d$

**Induktionsstart:** $d = 1$ Die Menge ist $\{\vec{v}_1\}$; diese ist lin. unabhängig, weil $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$.

**Induktionsschritt** Sei $d > 1$ und sei die Beh für alle kleineren Mengen schon bewiesen. Sei eine Relation gegeben

$$(*) \qquad \vec{0} = \sum \alpha_i \cdot \vec{v}_i$$

Betrachte

$$
\begin{aligned}
\vec{0} &= f(\vec{0}) - \lambda_1 \cdot \vec{0} && \mid (*) \text{ einges.} \\
&= f\left(\sum \alpha_i \vec{v}_i\right) - \lambda_1 \cdot \sum \alpha_i \cdot \vec{v}_i && \mid \text{Linearität} \\
&= \sum \alpha_i f(\vec{v}_i) - \sum \lambda_1 \cdot \alpha_i \cdot \vec{v}_i \\
&= \sum \alpha_i \lambda_i \cdot \vec{v}_i - \sum \lambda_1 \alpha_i \vec{v}_i \\
&= \sum \alpha_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_1)}_{\substack{= 0 \text{ falls } i = 1 \\ \neq 0 \text{ sonst.}}} \cdot \vec{v}_i && (+)
\end{aligned}
$$

Also: $(+)$ ist Relation unter $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_d$

Induktionsannahme: $\alpha_2 = \dots = \alpha_d = 0$.

Die Relation $(*)$ ist also

$$\alpha_1 \cdot \underbrace{\vec{v}_1}_{\neq 0} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1 = 0.$$

**Also** alle $\alpha_i = 0$, Relation $(*)$ ist trivial

$\Rightarrow$ Die Menge $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d\}$ ist linear unabh.

$\square$