Satz 1.3.1 TFAE

① f ist diagonalisierbar

② $\chi_f(t)$ zerfällt in Linearfaktoren & für jeden Eigenwert ist geom. Vielfachheit = alg. Vielfachheit.

Beweis ① ⇒ ② Wähle Basis, so dass die Matrix von f diagonal ist, lese char. Polynom, geom. & alg. Vielfachheit ab. □

Beweis ② ⇒ ①

Schritt a: Das char. Polynom zerfällt, schreibe

$$\chi_f(t) = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_\ell)^{d_\ell}$$

wobei $\lambda_1 - \lambda_\ell$ die Eigenwerte von f sind.

Erinnerung: $\deg \chi_f = \dim V$.

Schritt b: Wähle Basen für die Eigenräume

$$\vec{v}_{1,1}, \ldots, \vec{v}_{1,d_1} \quad \ldots \quad \text{für } V_{\lambda_1}$$
$$\vec{v}_{2,1}, \ldots, \vec{v}_{2,d_2} \quad \ldots \quad \text{für } V_{\lambda_2}$$
$$\vdots$$
$$\vec{v}_{\ell,1}, \ldots, \vec{v}_{\ell,d_\ell} \quad \ldots \quad \text{für } V_{\lambda_\ell}.$$

Wir wissen: dies sind insgesamt $\dim V$ viele Vektoren.

Schritt c Diese Vektoren bilden Basis von V.

(falls das stimmt, dann ist f in dieser Basis diagonal)

Nur zu zeigen: diese Vektoren sind linear unabh.

Sei also eine lineare Relation gegeben:

$$(*) \quad \vec{0} = \sum_{i=1}^{\ell} \underbrace{\sum_{j=1}^{d_i} \alpha_{i,j} \cdot \vec{v}_{i,j}}_{=:\ \vec{w}_i \text{ ist Eigenvektor zum EW } \lambda_i}$$

Eigenvekt. zu λ_i

$$= \sum_{i=1}^{\ell} 1 \cdot \vec{w}_i \quad \overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \quad \text{alle } \vec{w}_i = \vec{0}.$$

Also: erhalte ℓ kleinere Relationen: $\forall i$:

$$\vec{0} = \vec{w}_i = \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_{i,j} \cdot \vec{v}_{i,j}$$

Basis von V_{λ_i} also linear unabh.

$$\Rightarrow \forall i,j: \alpha_{i,j} = 0$$

Also ist $(*)$ die triviale Relation. □