

Beweis von Satz 8.2.2 Sei $U \subseteq V$ ein UVR und sei $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ eine ONB von U .

Beweis durch abstr. Induktion nach $\dim U$.

Start Sei $\dim U = \dim V$. Dann ist $U = V$, und $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ ist ONB von V .

Also nichts zu zeigen.

Schritt Sei jetzt $\dim U < \dim V$ ($\dim U = 0$ ist absolut möglich!).

Dann ist $U \neq V$, deshalb wähle $\vec{v} \in V \setminus U$ (... insbes. $\vec{v} \neq \vec{0}$).

$$\text{Setze } \vec{v}' = - \sum_{i=1}^m \langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle \cdot \vec{u}_i + \vec{v}$$

Beob: dann ist für alle Indizes j

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}', \vec{u}_j \rangle &= - \sum_{i=1}^m \langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle \cdot \underbrace{\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle}_{= \delta_{ij}} + \langle \vec{v}, \vec{u}_j \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also: $\langle \vec{v}', \vec{u}_i \rangle = 0 \quad \forall i, \quad \vec{v}' \notin U$, also $\vec{v}' \neq \vec{0}$

Kann also setzen

$$\vec{u}_{m+1} = \frac{\vec{v}'}{\|\vec{v}'\|}$$

Dann bilden $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}$ eine ONB eines UVR

$$U \subsetneq U' \subseteq V$$

Wende Induktionsannahme an, ergänze zu ONB von V

□