

Beweis von Satz 8.2.5 Eindeutigkeit & Existenz! $0 \in \{0\} \subset U \subset V$.

Eindeutigkeit Ang. ich habe Vektor $\vec{v} \in V$ mit 2 Zerlegungen:

$$\vec{v} = p_1(\vec{v}) + r_1(\vec{v}) = p_2(\vec{v}) + r_2(\vec{v})$$

$$\text{Dann } \vec{w} = \underbrace{p_1(\vec{v}) - p_2(\vec{v})}_{\in U} = \underbrace{r_2(\vec{v}) - r_1(\vec{v})}_{\in U^\perp}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \text{Zerlegungen sind gleich. } \square$$

Existenz Sei Vektor $\vec{v} \in V$ gegeben. Wähle eine ONB $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ von U .

Dann setze:

$$r(\vec{v}) := \vec{v} - \sum_{i=1}^m \langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle \cdot \vec{u}_i$$

Dann ist für alle Indizes j :

$$\langle r(\vec{v}), \vec{u}_j \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}_j \rangle - \sum_{i=1}^m \langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle \cdot \underbrace{\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle}_{\delta_{ij}} = 0.$$

Also ist nach Prop. 8.1.3 $r(\vec{v}) \in U^\perp$.

Weiter ist

$$p(\vec{v}) := \vec{v} - r(\vec{v}) = \sum_{i=1}^m \langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle \cdot \vec{u}_i \in U. \quad \square$$