

Beweis von Satz 8.3.1

① Linearität von s . Muss zeigen: $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ muss gelten

$$s_{\vec{v}_1 + \lambda \cdot \vec{v}_2} = s_{\vec{v}_1} + \lambda \cdot s_{\vec{v}_2} \in V^* \quad (*)$$

Seien also $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \lambda$ wie oben gegeben. Die Gleichung $(*)$ gilt in V^* , wenn für alle $\vec{w} \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} s_{\vec{v}_1 + \lambda \cdot \vec{v}_2}(\vec{w}) &= (s_{\vec{v}_1} + \lambda \cdot s_{\vec{v}_2})(\vec{w}) \\ &= s_{\vec{v}_1}(\vec{w}) + \lambda \cdot s_{\vec{v}_2}(\vec{w}). \end{aligned} \quad (**)$$

Einsetzen der Def. liefert $(**)$ ist äquivalent zu

$$\langle \vec{w}, \vec{v}_1 + \lambda \cdot \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v}_1 \rangle + \lambda \cdot \langle \vec{w}, \vec{v}_2 \rangle \quad (***)$$

Die Gleichung $(***)$ gilt für alle $\vec{w}$ wg. Def. des Skalarproduktes;
Linearität in der 2.ten Komponente

Isomorphie-Eigenschaft Wissen schon: $\dim V = \dim V^*$, deshalb
genügt es, zu zeigen: s ist injektiv, oder äquivalent: $\ker(s) = \{\vec{0}\}$.

Sei also ein Vektor $\vec{v} \in \ker(s)$ gegeben. Das bedeutet: $s(\vec{v}) = s_{\vec{v}} = \vec{0}$
in V^* . Äquivalent: $\forall \vec{w} \in V$:

$$\underbrace{s_{\vec{v}}(\vec{w})}_{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle} = 0 \in \mathbb{R}$$

Insbesondere ist $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \in \mathbb{R}$, d.h. (pos. Definitheit) $\vec{v} = \vec{0}$.

Also $\ker(s) = \{\vec{0}\}$. $\square$