

Beweis von 8.3.2.1

Will zeigen: $S(U^\perp) = U^0$. Sei: $\vec{v} \in V$ ein Vektor.

Dann äquivalent

$$\vec{v} \in U^\perp \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0 \quad \forall \vec{u} \in U.$$

Symm.

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}_{S_{\vec{v}}(\vec{u})} = 0 \quad \sim \text{ " } \sim$$

def.

$$\Leftrightarrow \quad S_{\vec{v}} \in U^0$$

Beweis von 8.3.2.2

Wir müssen zeigen ① $U \cap U^\perp = \{\vec{0}\}$.

② $U + U^\perp = V$.

zu 1 Sei $\vec{v} \in U \cap U^\perp$ geg. b.w. Dann $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0 \quad \forall \vec{u} \in U$

Insbes. $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \quad \begin{matrix} \text{pos.} \\ \Rightarrow \\ \text{def.} \end{matrix} \vec{v} = \vec{0}$.

zu 2 Dimensionsformel aus LA 1:

$$\begin{aligned} \dim U + U^\perp &= \dim U + \dim U^\perp - \underbrace{\dim (U \cap U^\perp)}_{=0} \\ &= \dim U + \dim U^\perp \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Teil 1}}{=} \dim V.$$

Also ist $U + U^\perp = V$. □