

Beweis von Prop. 9.1.6

zu 1 Sei ein Vektor $\vec{v} \in V$ gegeben. Dann $\|\vec{v}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} =$

$$\stackrel{f \text{ unitär}}{=} \sqrt{\langle f(\vec{v}), f(\vec{v}) \rangle} = \|f(\vec{v})\|. \quad \checkmark$$

zu 2 Sei λ ein Eigenwert, sei $\vec{v}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann

$$0 \neq \|\vec{v}\| \stackrel{(1)}{=} \|f(\vec{v})\| = \|\lambda \cdot \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$$

$$\Leftrightarrow |\lambda| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = 1.$$

zu 3 Seien Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in V$ gegeben. Dann

$$\vec{v} \perp \vec{w} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(\vec{v}), f(\vec{w}) \rangle = 0 \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} f(\vec{v}) \perp f(\vec{w})$$

$= 0$

④ Wir zeigen: $\ker f = \{\vec{0}\}$. Sei also ein Vektor $\vec{v} \in \ker f$ gegeben

$$\text{Dann } \|\vec{v}\| \stackrel{(1)}{=} \|f(\vec{v})\| = \|\vec{0}\| = 0 \quad \begin{array}{l} \text{pos.} \\ \Rightarrow \\ \text{def.} \end{array} \vec{v} = \vec{0}.$$

⑤ f ist inj. Abb. von $V \rightarrow V$. Also ist f surjektiv, also Isomorphismus.

Noch z.z.: f^{-1} ist orth./unitär.

Seien Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in V$ gegeben. Dann

$$\langle f^{-1}(\vec{v}), f^{-1}(\vec{w}) \rangle = \underbrace{\langle f \circ f^{-1}(\vec{v}), f \circ f^{-1}(\vec{w}) \rangle}_{f \text{ orth./unitär}} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

□