Beweis von Satz 9.2.5   Induktion nach dim V!

Start dim $V = 1$. Dann wähle irgendeinen Vektor der Länge 1, fertig.
(wähle dazu Vektor $\vec{v}' \in V \setminus \{\vec{0}\}$, setze $\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \cdot \vec{v}$).

Schritt: Sei dim $V > 1$; sei die Beh. für all Endomorph. von Vektorräumen kleinerer dimension schon bewiesen.

Dann: Weil wir über $\mathbb{C}$ arbeiten, gibt es Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}^*$ mit zugeh. Eigenvektor $\vec{v}$. Betrachte

$$W = \{ \vec{w} \in V \mid \vec{v} \perp \vec{w} \} \subseteq V$$

Beobachte. $W \subseteq V$ ist Untervektorraum und $V = W \oplus \langle \vec{v} \rangle$

Beobachte: Wenn $\vec{w} \in W$ gegeben ist, dann

$$0 = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle f(\vec{w}), f(\vec{v}) \rangle = \langle f(\vec{w}), \lambda \cdot \vec{v} \rangle$$

$$= \underbrace{\bar{\lambda}}_{\neq 0} \cdot \langle f(\vec{w}), \vec{v} \rangle \qquad \Rightarrow f(\vec{w}) \in W, \text{ für alle } \vec{w} \in W.$$

Insgesamt: die (injektive) Abb. f schränkt ein zu einer (inj.) unitären Abb. $f|_W : W \to W$ [dabei fassen $W \subseteq V$ als unit. VR auf mit eingeschr. Skalarprodukt].

Induktionsvoraussetzung es gibt ONB $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_d$ von W, bestehend aus Eigenvektoren von $f|_W$ (... die dann auch EV von f)

Dann ist $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_d, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ eine ONB von V, bestehend aus Eigenvektoren von f.

$\square$