

Beweis von Satz 9.2.6

Vorüberlegung Wenn ich $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, dann rechne nach: $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$.

zum Satz Zerlegung in direkt. Summe $V = \bigoplus V_{\lambda_i}$ ist klar nach Satz 9.2.5

Müssen orthogonal zeigen. Widerspruchsbeweis: ang. hätte Indizes $i \neq j$

Vektoren $\vec{v}_i \in V_{\lambda_i}$, $\vec{v}_j \in V_{\lambda_j}$ s.d.

$$\begin{aligned} 0 \neq \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle &= \langle f(\vec{v}_i), f(\vec{v}_j) \rangle = \langle \lambda_i \vec{v}_i, \lambda_j \vec{v}_j \rangle \\ &= \lambda_i \cdot \overline{\lambda_j} \cdot \underbrace{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle}_{=0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 = \lambda_i \cdot \overline{\lambda_j} = \lambda_i \cdot \lambda_j^{-1} \quad \Rightarrow \quad \lambda_j = \lambda_i \quad \text{⚡ Widerspruch zur Annahme!}$$

□