

Beweis von Satz 9.4.3 Induktion nach $\dim V$!

Induktionsstart: Sei $\dim V = 1$. Dann ist $f = \pm \text{id}_V$, Beweis ist fertig!

Induktionsschritt Sei $\dim V \geq 2$, sei die Beh. für kleine Räume bewiesen.

Fall: f hat reellen Eigenwert λ . Dann ist $\lambda = \pm 1$, wählen $E \in V$ $\vec{v} \in V$

und betrachten UR $U := \langle \vec{v} \rangle$ sowie $U^\perp$. Wissen schon:

$$f(U) = U; \quad f(U^\perp) = U^\perp, \quad f|_{U^\perp}: U^\perp \rightarrow U^\perp \text{ ist eine orth.}$$

Abbildung. Induktionsannahme; $\exists$ Basis $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}$ von $U^\perp$ s.d.

die Matrix von $f|_{U^\perp}$ aussieht wie in 9.4.3

Dann betr. Basis $\vec{v}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ von V . In dieser Basis sieht die Matrix von f aus wie

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & \\ 0 & & M \end{pmatrix}$$

Nach Permutation der Basiselemente erhalte ich die gew. Form.

Fall: es gibt keinen reellen EW

Nach Lemma 9.4.9 finde Untervektorraum $U \leq V$; $\dim U = 2$ s.d.

$f(U) = U$. Wieder betr. $U^\perp$, wende die Induktionsannahme auf

$f|_{U^\perp}: U^\perp \rightarrow U^\perp$ an, erhält Basis $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-2}$ wie oben

Zusätzlich: nach 9.4.1, finde ich Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ von U s.d.

Matrix von $f|_U$ bzgl. dieser Basis in SO_2 liegt (in dem die Matr. in $O_2 \setminus SO_2$ sind Spiegelungen; diese haben aber reellen EW)

Bzgl. der Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-2}$ hat die Matrix von f jetzt die

Form

2x2-Matrix
in SO_2

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

wie oben; hat die
Form aus 9.4.3

Insgesamt erhält gewünschte Form, ggfs. nach Permutation der Basiselemente.

□