

Beweis von Satz 10.0.5 Beweis mit Induktion nach $\dim V$.

Ind. start $\dim V = 1$. Wähle beliebigen Vektor der Länge 1, fertig ist die ONB.

Ind. schritt Sei: $\dim V > 1$, sei die Beh. für Räume kleinerer Dim.

schon bewiesen. Wissen nach 10.0.4: f hat reellen EW λ ,

wähle zugeh. EV $\vec{v}$ mit $\|\vec{v}\| = 1$. Betr. $U = \langle \vec{v} \rangle$

und $U^\perp$... das orth. Komplement.

Beh Die Abb. f bildet $U^\perp$ auf sich selbst ab.

Beweis der Beh Sei: $\vec{w} \in U^\perp$. Dann gilt:

$$\langle \vec{v}, f(\vec{w}) \rangle = \langle f(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \lambda \cdot \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \underbrace{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}_{=0 \text{ weil } \vec{w} \in U^\perp} = 0$$

$$\Rightarrow f(\vec{w}) \in U^\perp \quad \square \text{ (Beh.)}$$

Prob: Die Einsch. $f|_{U^\perp} : U^\perp \rightarrow U^\perp$ ist selbstadjungiert,

also $\exists$ nach Induktionsvoraussetzung eine ONB $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}$

von Eigenvektoren.

Dann ist $\vec{v}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}$ eine Basis von V , die nur aus EV besteht und orthonormal ist. $\square$