

Beweis von Satz 14.3.1

① Konstruktion einer Abb. $\eta: (\oplus V_i)^* \rightarrow \prod (V_i^*)$

Erinnerung: haben $\forall j \in I$ die kanon. Injektionen $\iota_j: V_j \rightarrow \oplus_{i \in I} V_i$

Dualisierend erhält Surjektionen

$$\iota_j^*: (\oplus V_i)^* \twoheadrightarrow V_j^*$$

Noch univ. Eigenschaft des dir. Produktes gibt es Abb η s.d.f. ①

$$\begin{array}{ccc} (\oplus V_i)^* & \xrightarrow{\eta} & \prod (V_i^*) \\ (*) \quad \parallel & & \downarrow p_i \\ (\oplus V_i)^* & \xrightarrow{(\iota_j)^*} & V_j^* \end{array}$$

② Injektiv: töt die Abb. $\eta : (\oplus V_i)^* \rightarrow \prod (V_i^*)$

Ang, habe $f \in \ker(\eta)$. Schreibe f als Abb. $f: \oplus V_i \rightarrow k$

Wir wissen: $f \in \ker(\eta)$, das bedeutet wg. Kommutativität von $\eta: V_j$

$$\underbrace{\eta_j^* (f)}_{f \circ \eta_j} = 0 \in V_j^*$$

Also: $f(\eta_j(\vec{v}_i)) = 0 \quad \forall j \in I: \forall \vec{v}_i \in V_i$

Wir wissen aber: jedes Element von $\oplus V_i$ ist eine endl. Summe von Elt. der Form $\eta_j(\vec{v}_i)$. Also ist $f \in (\oplus V_i)^*$ gleich 0.

$\Rightarrow \eta$ ist injektiv!

③ Surjektivität der Abb. $\eta: (\bigoplus V_i)^* \rightarrow \prod (V_i^*)$

Sei ein Elt. $f \in \prod (V_i^*)$ gegeben. Schreibe $f = (f_i)_{i \in I}$.

Betr. das Element

$$F: \bigoplus V_i \longrightarrow k$$

$$(\vec{v}_i)_{i \in I} \mapsto \sum_i f_i(\vec{v}_i) = \sum p_i(f)(\vec{v}_i)$$

ist endl. Summe
weil fast alle $\vec{v}_i = 0$

Beh.: es ist $F \in (\bigoplus V_i)^*$, und wegen der Komm. von $(*)$

$$\text{ist } \eta(F) = f.$$

□