Eindeutigkeit des Tensorproduktes

Ang. habe zwei Tensorprod. $\tau_1 : U \times V \to T_1$
$\tau_2 : U \times V \to T_2$

Dann betr. folgendes (komm.) Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, equal] & T_1 \arrow[d, "\exists!\, \eta_{12}"] \\
U \times V \arrow[r, "\tau_2"'] \arrow[d, equal] & T_2 \arrow[d, "\exists!\, \eta_{21}"] \\
U \times V \arrow[r, "\tau_1"'] & T_1
\end{tikzcd}$$

Wissen: ex. lineare Abb.

Die univ. Eigenschaft, angewendet auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_1 \arrow[d, "\eta_{12} \circ \eta_{21}"] \\
U \times V \arrow[r] & T_1
\end{tikzcd}$$

Sagt, dass es nur eine Abb. $T_1 \to T_1$ gibt, s.d. D. k. Wir kennen aber zwei:

- Die Identität Id_{T_1}
- Die Abb $\eta_{12} \circ \eta_{21}$

Also ist $\eta_{12} \circ \eta_{21} = \mathrm{Id}_{T_1}$. Analog erhalten auch $\eta_{21} \circ \eta_{12} = \mathrm{Id}_{T_2}$.

Also sind η_{12} und η_{21} zueinander inverse Isomorphismen. □