

Beweis von Satz 15.1.3: Existenz von Tensorprodukten

Seien Vektorräume U, V gegeben. Betr. den (gigantisch großen) Vektorraum $T' = {}_k(U \times V)$ das ist die direkte Summe!

und die Abb. $\tau': U \times V \rightarrow T' \quad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto e_{(\vec{u}, \vec{v})}$. ↖ Aufg. 14.1.6:
diese Einheits-
vektoren bilden
Basis.

Was ist gut an dieser Konstruktion? Gegeben irgendeine bilineare Abb

$s: U \times V \rightarrow W$, dann gibt es genau eine lin. Abb

$\eta': T' \rightarrow W$, sodass Dh:

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\tau'} & T' \\ \parallel & & \downarrow \exists! \eta' \\ U \times V & \xrightarrow{s} & W \end{array}$$

Dabei ist η' die (eindeutige!) lineare Abb., die die Basisvekt. $e_{(\vec{u}, \vec{v})}$ auf $s(\vec{u}, \vec{v})$ abbildet. [Existenz & Eindeutigkeit ist der Satz vom Wunsch-Dir-Was]

Was ist schlecht an dieser Konstruktion? Die Abb. τ' ist absolut nicht bilinear! Idee erzwingt Bilinearität durch Quot.konstruktion.

Dazu betr. Mengen von Vektoren:

$$M_1 = \{ \lambda \cdot e_{(\vec{u}, \vec{v})} - e_{(\lambda \cdot \vec{u}, \vec{v})} \mid \vec{u} \in U, \vec{v} \in V, \lambda \in k \}$$

$$M_2 = \{ \lambda \cdot e_{(\vec{u}, \vec{v})} - e_{(\vec{u}, \lambda \cdot \vec{v})} \mid \text{---} " \text{---} \}$$

$$M_3 = \{ e_{(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v})} - e_{(\vec{u}_1, \vec{v})} - e_{(\vec{u}_2, \vec{v})} \mid \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U, \vec{v} \in V \}$$

$$M_4 = \{ e_{(\vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2)} - e_{(\vec{u}, \vec{v}_1)} - e_{(\vec{u}, \vec{v}_2)} \mid \vec{u} \in U, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \}$$

$$R = \langle M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \rangle \subset T'$$

Betr. noch einmal das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\tau'} & T' \\ \parallel & & \downarrow \eta' \\ U \times V & \xrightarrow{s, \text{ bilinear}} & W \end{array}$$

Beob. Weil s bilinear ist, liegen alle Ekt. von M_1, M_2, M_3, M_4 im Kern von η'
 $\Rightarrow R \subset \ker(\eta')$

Also ergänzt sich wg. der universellen Eig. von Quotienten das Diagramm wie folgt:

$$\begin{array}{ccccc} U \times V & \xrightarrow{\tau'} & T' & \xrightarrow{\text{quotient}} & T'/R \\ \parallel & & \downarrow \eta' & & \downarrow \exists! \tau \\ U \times V & \xrightarrow{s, \text{ bilinear}} & W & & W \end{array}$$

Nochrechnen: Nach Konstruktion von R ist die komp. Abb.

$$\tau := \text{quotient} \circ \tau'$$

bilinear! Damit ist $T := T'/R$ und $\tau: U \times V \rightarrow T$ ein

Tensorprodukt!

□