

Beweis von Satz 2.2.10: Sei $f \in \text{End}(V)$ und sei λ ein Eigenwert von f .

Vorüberlegung sagt: es gibt Basis $\mathcal{B}$ von V , s.d.

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{D} & * \\ \hline 0 & A \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \lambda \quad * \\ 0 \quad \lambda \end{array} & * \\ \hline 0 & A \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \lambda \quad * \\ 0 \quad \lambda \end{array} & * \\ \hline 0 & A \end{array}} \right\} \begin{array}{l} r \text{ Zeilen} \\ \lambda \text{ ist} \\ \text{kein EW} \\ \text{von } A \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{r \text{ Spalten}}$

Folgerung

$$M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f - \lambda \cdot \text{id}_V) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{D}' & * \\ \hline 0 & A' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \quad * \\ 0 \quad 0 \end{array} & * \\ \hline 0 & A' \end{array} \right)$$

$\nearrow$
0 ist kein EW von A'
 $\Leftrightarrow \ker(A') = \{0\}$
 $\Leftrightarrow A'$ ist invertierbar.

Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(M')^n = \left(\begin{array}{c|c} (\mathbb{D}')^n & * \\ \hline 0 & (A')^n \end{array} \right) \quad \text{wobei } \forall n \geq r: (\mathbb{D}')^n = 0$$

Folgerung: $\text{Ker}_{\lambda}(f)$ ist aufgespannt von den ersten r Vektoren aus $\mathcal{B}$

Aus Gestalt der Matrix M' folgt Eigenschaft 1, 2, 5

———— " ———— M ———— " ———— 3, 4.

□