Beweis von Prop. 2.3.4

① Sei ein Index p gegeben, sei $\vec{v} \in V^p$. Dann ist

$$f^{p+1}(\vec{v}) = f\left(f^p(\vec{v})\right) \underset{\vec{v} \in V^p}{=} f(\vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \in V^{p+1}.$$

② Sei Index p gegeben, sei $\vec{v} \in V$. Dann

$$v \in V^p \Leftrightarrow f^p(\vec{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow f^{p-1}\left(f(\vec{v})\right) = \vec{0} \Leftrightarrow f(\vec{v}) \in V^{p-1}.$$

③ Betrachte die Abb.

$$\tilde{f} : V^p \longrightarrow V^{p-1}/V^{p-2}$$
$$\vec{v} \longmapsto [f(\vec{v})]$$

Punkt ② sagt, dass $f(\vec{v}) \in V^{p-1}$ ist, also ist Def. ok.

Was ist $\ker(\tilde{f})$?

Antwort $\ker(\tilde{f}) = \{\vec{v} \in V^p \mid f(\vec{v}) \in V^{p-2}\}$

$$\overset{②}{=} \{\vec{v} \in V^p \mid \vec{v} \in V^{p-1}\}$$

$$\overset{①}{=} V^{p-1}$$

Also existiert Abb. $\overline{f}$ nach universelle Eigenschaft des Quotientenvektorraumes. Zusätzlich: $\ker(\overline{f}) = V^{p-1}/V^{p-1} = \{\vec{0}\}$

also ist $\overline{f}$ injektiv!

□