Beweis von Lemma 5.4.8: Wir müssen zeigen

① $\phi(\vec{v}_1), \dots, \phi(\vec{v}_n)$ bilden eine Basis.

② Für alle Indizes i, j ist $\langle \phi(\vec{v}_i), \phi(\vec{v}_j) \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

zu ② Seien Indizes i, j gegeben. Dann

$$\langle \phi(\vec{v}_i), \phi(\vec{v}_j) \rangle \underset{5.4.7}{=} \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle \overset{\text{Annahme}}{=} \delta_{ij}$$

zu ① Muss zeigen: Basis. Es reicht zu zeigen: die $\phi(\vec{v}_1), \dots, \phi(\vec{v}_n)$ sind linear unabhängig. Sei eine Relation gegeben

$$\vec{0} = \sum \lambda_i \cdot \phi_i(\vec{v}_i)$$

Beobachtung 5.4.6. Dann ist für alle j:

$$\lambda_j = \langle \phi(\vec{v}_j), \underbrace{\sum \lambda_i \phi_i(\vec{v}_i)}_{=\vec{0}} \rangle = \langle \phi(\vec{v}_j), \vec{0} \rangle = 0. \qquad \square$$