

Beweis von Satz 5.5.2

Vorüberlegung Matrix Q hat die Form $(\phi(\vec{e}_1), \dots, \phi(\vec{e}_n))$

$$\sim \text{''} \sim {}^t Q \sim \text{''} \sim \begin{pmatrix} {}^t \phi(\vec{e}_1) \\ \vdots \\ {}^t \phi(\vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

Die Produktmatrix

$${}^t Q \cdot Q = (a_{ij}) ; \text{ wo } a_{ij} = {}^t \phi(\vec{e}_i) \cdot \phi(\vec{e}_j) = \langle \phi(\vec{e}_i), \phi(\vec{e}_j) \rangle.$$

Beweis $1 \Rightarrow 2$ Sei ϕ orthogonal. Lemma 5.4.8: $\phi(\vec{e}_1), \dots, \phi(\vec{e}_n)$ ist ONB,

d.h.

$$\langle \phi(\vec{e}_i), \phi(\vec{e}_j) \rangle = \delta_{ij}.$$

Also:

$${}^t Q \cdot Q = (\delta_{ij}) = \text{Einheitsmatrix!}$$

□

Beweis: $2 \Rightarrow 1$ Annahme: $\langle \phi(\vec{e}_i), \phi(\vec{e}_j) \rangle = \delta_{ij}$.

Wollen zeigen: ϕ ist orthogonal.

Hausaufgabe: Dazu reicht es, z. Z., dass $\| \vec{x} \|^2 = \| \phi(\vec{x}) \|^2 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Sei also ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Schreibe, $\vec{x} = \sum \lambda_i \vec{e}_i$.

Dann ist

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \sum \lambda_i \vec{e}_i, \sum \lambda_i \vec{e}_i \rangle$$

$$= \sum_i \langle \lambda_i \vec{e}_i, \lambda_i \vec{e}_i \rangle \quad \text{weil} \quad \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0 \quad \text{falls} \quad i \neq j.$$

$$\sum_i^n \langle \lambda_i \cdot \phi(\vec{e}_i), \lambda_i \phi(\vec{e}_i) \rangle$$

$$= \left(\sum \lambda_i \phi(\vec{e}_i), \sum \lambda_i \phi(\vec{e}_i) \right) \quad \text{weil } \langle \phi(\vec{e}_i), \phi(\vec{e}_j) \rangle = 0$$

falls $i \neq j$.

$$= \langle \phi(\vec{x}), \phi(\vec{x}) \rangle.$$