

Jordan-Normalform

Ziel: Für $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ möchten wir die Existenz von $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ zeigen, s.d.

$$S^{-1}AS =: J$$

in Jordan-Normalform ist.

Annahme: A hat nur einen einzigen EW $\lambda \in \mathbb{C}$.
Wenn das nicht so ist, dann führe man die unten stehenden Schritte für jeden EW von A durch.
Man muss dann aber n durch die jeweilige alg. Vfh. ersetzen.

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda, n_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\lambda, n_2) \end{pmatrix},$$

$$J(\lambda, n_1) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad n_1 \times n_1\text{-Mat.}$$

Intuition: $n_1, n_2 \geq 2$.

Dann gilt:

$$1. \text{ K\"astchen} \quad \begin{cases} (J - \lambda E_n) e_1 = 0 \\ (J - \lambda E_n) e_2 = e_1 \\ \vdots \\ (J - \lambda E_n) e_{n_1} = e_{n_1-1} \end{cases}$$

$$2. \text{ K\"astchen} \quad \begin{cases} (J - \lambda E_n) e_{n_1+1} = 0 \\ \vdots \\ (J - \lambda E_n) e_{n_1+n_2} = e_{n_1+n_2-1} \end{cases}$$

... analog f\"ur alle K\"astchen.

Idee: " Wollen dasselbe f\"ur A ", d. h. wollen lin. unabh. Vektoren $v_1, \dots, v_{n_1}$ (f\"ur das 1. K\"astchen),
... , s. d. gilt:

$$(A - \lambda E_n) v_1 = 0$$

$\vdots$

$$(A - \lambda E_n) v_{n_1} = v_{n_1-1}$$

Wie findet man $n_1, \dots, n_\ell$?

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\chi_A(t) = (t-1)^4 \Rightarrow 1$ ist der einzige EW von A .

- $A - E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A - E_4$ hat 2-dim. Kern

Es gilt: $\ker(A - E_4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow m_1 = 2$

$$(A - E_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \ker((A - E_4)^2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow m_2 = 1$$

$$(A - E_4)^3 = 0$$

$$\leadsto \ker((A - E_4)^3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow m_3 = 1$$

Insgesamt: $(m_1, m_2, m_3) = (2, 1, 1)$

ist eine Partition von $n = 4$

Es gilt: $n_{\boxed{1}} = |\{j \mid m_j \geq \boxed{1}\}| = 3$

$$n_{\boxed{2}} = |\{j \mid m_j \geq \boxed{2}\}| = 1$$

$\leadsto (n_1, n_2) = (3, 1)$ ist Partition von $n = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\leadsto J = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ ist JNF von A .

Wie bestimmt man S , s.d. $S^{-1}AS = J$?

Für jede Zahl $j \in \{1, \dots, n\}$, beginnend bei der größten (n), stellt man sich die Frage:

Habe ich ein Jordan-Kästchen der Größe j ?

$j=4$: Nein. $\leadsto W_4 := \{0\}$

$j=3$: Ja. Definiere
 $W_3 := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

$j=2$: Nein. $\leadsto W_2 := \{0\}$

$\dots$

$\delta = 1$ ja.

W_1 ist ein Raum, s.d. gilt:

$$W_1 \oplus \underbrace{(A - E_4)(W_2)}_{\parallel \ker(A - E_4)} \oplus \underbrace{(A - E_4)^2 W_3}_{= \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

no $W_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ tut den Job.

Berechne:

$$(A - E_4)^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (A - E_4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\parallel \qquad \qquad \parallel \qquad \qquad \parallel$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ersten drei Spalten von S !

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow S := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ tut den Job,}$$

$$\text{d.h. } S^{-1}AS = J. //$$

1.