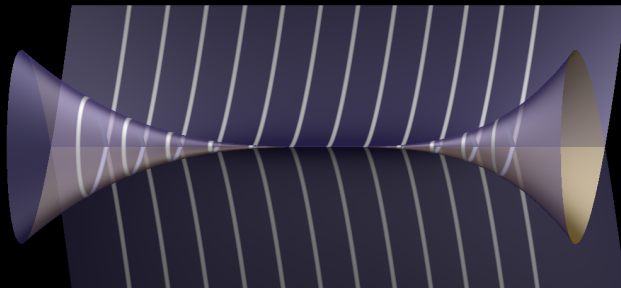


# Rationale Kurven auf projektiven Mannigfaltigkeiten



HABILITATIONSSCHRIFT ZUR ERLANGUNG DES GRADES DR. RER. NAT. HABIL.  
DER FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK DER UNIVERSITÄT BAYREUTH.  
VORGELEGT VON STEFAN KEBEKUS

12. FEBRUAR 2001

Das Umschlagbild zeigt eine Deformationsfamilie  $V$  mit nodalen und mit einer kuspidalen Kurve.

Die Gleichung der dargestellten Varietät ist

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^3 + y^2 - (0.1x^2)z^2\}.$$

Das Bild wurde mit dem Programm `surf` von Stephan Endrass gezeichnet.

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iii
Einleitung	1
Kapitel 1. Rationale Kurven auf projektiven Mannigfaltigkeiten	5
1.1. Existenz rationaler Kurven	5
1.2. Die Parametrisierung von Morphismen	5
1.3. Der Raum der rationalen Kurven	7
1.4. Moris Spaltungskriterium: Biegen und Brechen	10
1.5. Bündel von rationalen Kurven	11
<b>Teil 1. Familien von singulären Kurven</b>	<b>13</b>
Kapitel 2. Ein Spaltungskriterium für singuläre Kurven	15
2.1. Spezielle und oskulierende Punkte	15
2.2. Formulierung des Spaltungskriteriums	17
2.3. Eine partielle Auflösung der Singularitäten	18
2.4. Beweis des Spaltungskriteriums	21
Kapitel 3. Anwendungen des Spaltungskriteriums	25
3.1. Familien von singulären Kurven auf projektiven Varietäten	25
3.2. Existenz einer endlichen Tangentialabbildung	27
3.3. Eindeutigkeit von minimalen Kurven durch zwei Punkte	28
3.4. Charakterisierung von $\mathbb{P}_n$	30
3.5. Optimalität der Resultate	32
Kapitel 4. Familien von singulären ebenen Kubiken	35
4.1. Regelflächen und elementare Transformationen	35
4.2. Charakterisierung von projektiven Bündeln	38
4.3. Oskulierende Orte	40
4.4. Beweis von Satz 4.2.1	43
4.5. Beweis von Satz 4.2.3	43
4.6. Beweis von Satz 4.2.4	44
<b>Teil 2. Kontaktmannigfaltigkeiten</b>	<b>47</b>
Kapitel 5. Kontaktmannigfaltigkeiten	49
5.1. Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit spezieller Holonomiegruppe	49

5.2.	Definition von Kontaktmannigfaltigkeiten	52
5.3.	Einfache Eigenschaften	53
5.4.	Beispiele	53
5.5.	Bekannte Resultate	55
Kapitel 6.	Geraden auf Kontaktmannigfaltigkeiten	57
6.1.	Die Existenz von Kontaktgeraden	57
6.2.	Deformationen von $F$ -integralen Kurven	58
6.3.	Die Dimension von $\text{locus}(H_x)$	61
6.4.	Die Regularität der Kontaktgeraden	61
6.5.	Der Auswertungsmorphismus $\iota_x$ und die Tangentialabbildung $\tau_x$	63
Kapitel 7.	Kontaktmannigfaltigkeiten mit $b_2(X) = 1$	65
7.1.	Eindeutigkeit von Kontaktstrukturen	65
7.2.	Die Injektivität der Tangentialabbildung $\tau_x$	68
7.3.	Die Normalisierung von $\text{locus}(H_x)$	70
Literaturverzeichnis		73
Index		75

## Abbildungsverzeichnis

1.2.1	Deformationen und Vektorfelder	6
1.3.1	Deformation mit zwei Fixpunkten	10
2.1.1	Singuläre ebene Kubiken	15
2.3.1	Singuläre Kurven durch ebene Kubiken ersetzen	18
2.4.1	Familie von immersierten Kurven	22
2.4.2	Familie von nicht-immersierten Kurven	22
2.4.3	Bündel von ebenen Kubiken mit Geradenbündel vom Grad 2	23
3.3.1	Existenz von singulären Kurven	29
3.5.1	Geraden im $\mathbb{P}_2$ mit $\mathbb{Z}_3$ -Wirkung	32
4.1.1	Zueinander inverse elementare Transformationen	37
4.2.1	Konstruktion von Bündeln	39
4.3.1	Der oskulierende Ort in der Nähe einer kuspidalen Kurve	42
5.1.1	Paralleltransport entlang einer glatten Kurve	49
5.4.1	Standard-Kontaktstruktur $\theta = dz + ydx$ .	54
6.2.1	Deformationen von $F$ -integralen Kurven	58
6.4.1	Zum Beweis der Proposition 6.4.1	62
7.1.1	Deformation von $\text{locus}(H_x)$	66
7.2.1	Zum Beweis der Proposition 7.2.4	70



## Einleitung

Eine Fano-Mannigfaltigkeit  $X$  ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, deren antikanonisches Bündel  $-K_X$  ample ist. Die Fano-Mannigfaltigkeiten und Fano-Varietäten spielen in der höherdimensionalen algebraischen Geometrie eine Sonderrolle, weil die Mori-Theorie voraussagt, dass jede unigeregelte Varietät birational zu einem Faserraum ist, dessen allgemeine Faser eine Fano-Varietät ist, die höchstens terminale Singularitäten haben kann.

Einer der Ansätze bei der Untersuchung einer Fano-Varietät  $X$  ist das Studium der rationalen Kurven, die in  $X$  enthalten sind. Dieser Ansatz ist durch S. Moris Arbeit [43] motiviert, in der die Hartshorne-Frankel-Vermutung (“Der projektive Raum ist die einzige projektive Mannigfaltigkeit mit amplem Tangentialbündel.”) bewiesen wird. Moris Beweis beruht im wesentlichen auf einer neuartigen Methode, die Existenz von rationalen Kurven auf projektiven Mannigfaltigkeiten  $X$  zu beweisen, wenn das kanonische Bündel  $K_X$  nicht nef ist. Mori konstruiert einen Raum, der die Kurven parametrisiert, und betrachtet eine Komponente, die zu den rationalen Kurven vom minimalen Grad gehört. Eine genaue Untersuchung der Teilfamilie der minimalen rationalen Kurven, die einen vorgegebenen Punkt enthält, liefert dann das Ergebnis.

Seit dieser Arbeit ist das Studium der rationalen Kurven vom minimalen Grad eine Standardmethode bei der Untersuchung derjenigen projektiven Mannigfaltigkeiten, die von rationalen Kurven überdeckt sind.

Dieser Ansatz ist besonders fruchtbar, wenn spezielle Mannigfaltigkeiten vorliegen, so dass man Zusatzaussagen über die rationalen Kurven hat. Ein Beispiel sind die Geraden auf Kontaktmannigfaltigkeiten, die wir im Kapitel 6 näher betrachten werden, aber das Hauptbeispiel sind Fano-Mannigfaltigkeiten, die “prim” sind. Dabei heißt eine Fano-Mannigfaltigkeit  $X$  “prim”, wenn es eine Einbettung  $i : X \rightarrow \mathbb{P}_m$  gibt, so dass die Bilder der minimalen rationalen Kurven Geraden im  $\mathbb{P}_m$  sind. Äquivalent können wir sagen, dass eine Fano-Mannigfaltigkeit  $X$  prim ist, wenn es ein sehr amples Geradenbündel  $L \in \text{Pic}(X)$  gibt, das die untersuchten Kurven mit Multiplizität 1 schneidet. Beispiele für Fano-Mannigfaltigkeiten, die prim sind, sind die homogenen rationalen Räume.

Natürlich ist nicht jede Fano-Mannigfaltigkeit prim, und es ist nicht einmal klar, wann es ein (nicht notwendigerweise sehr amples) Geradenbündel  $L \in \text{Pic}(X)$  gibt, welches die minimalen rationalen Kurven mit Multiplizität 1 schneidet. Ein solches Geradenbündel scheint für alle dem Autor bekannten Beispiele von Fano-Mannigfaltigkeiten zu existieren; ein allgemeines Existenzresultat gibt es aber nicht.

Es ist in diesem Zusammenhang sinnvoll, die Geometrie von Familien von rationalen Kurven von minimalem Grad zu studieren und dabei gelegentlich die Zusatzannahme zuzulassen, dass es ein Geradenbündel  $L$  gibt, das die Kurven mit kleiner Multiplizität schneidet. Insbesondere ist es interessant, Antworten auf die – etwas philosophische – Frage zu geben,

inwieweit die Geometrie von Familien von minimalen rationalen Kurven der Geometrie der Geraden im projektiven Raum ähnelt. Dieser Problemkreis umfasst unter anderem die folgenden, etwas präziseren, Fragen.

- (1) Wenn eine Familie von rationalen Kurven von minimalem Grad gegeben ist, sind die zugehörigen Kurven dann im allgemeinen glatt? Gibt es eine obere Schranke für die Dimension der Teilfamilie, die singuläre Kurven beschreibt?
- (2) Wenn wir einen Punkt  $x$  vorgeben, dann können wir einer glatten minimalen rationalen Kurve  $\ell$ , die  $x$  enthält, den Tangentialraum  $T_\ell|_x$  zuordnen. Wir erhalten so eine rationale “Tangentialabbildung”

$$\tau_x : \{\text{min. ratl. Kurven durch } x\} \dashrightarrow \mathbb{P}(T_X^*|_x)$$

Eine Untersuchung der bekannten Beispiele von Fano-Mannigfaltigkeiten legt die Fragen nahe: Ist die Tangentialabbildung ein Morphismus? Ist das Bild der Tangentialabbildung projektiv normal? Wann ist das Bild der Tangentialabbildung linear entartet?

- (3) Wenn eine Familie von rationalen Kurven vom minimalen Grad gegeben ist, und wenn zwei hinreichend allgemeine Punkte  $x$  und  $y$  gegeben sind, wie viele Kurven gibt es dann, die sowohl  $x$  als auch  $y$  enthalten? Wann ist eine minimale rationale Kurve durch zwei Punkte eindeutig bestimmt?
- (4) Wenn ein allgemeiner Punkt  $x \in X$  und ein Tangentialvektor  $\vec{v} \in T_X|_x$  vorgegeben sind, wie viele minimale rationale Kurven gibt es dann, die den Punkt  $x$  enthalten und dort tangential an  $\vec{v}$  sind? Wann ist die Tangentialabbildung  $\tau_x$  injektiv?

**Singuläre rationale Kurven.** Die meisten dieser Probleme sind direkt oder indirekt mit der Frage nach der Existenz von *singulären* rationalen Kurven verknüpft. So zeigt etwa ein Kriterium von Y. Miyaoka (Satz 3.3.1 auf Seite 28), dass eine minimale rationale Kurve durch zwei Punkte eindeutig bestimmt ist, wenn alle minimalen rationalen Kurven an den betreffenden Punkten glatt sind. Es ist deshalb für uns von Interesse, die Teilfamilie im Raum der minimalen rationalen Kurven zu untersuchen, die die singulären Kurven beschreibt. Weil polarisierte singuläre rationale Kurven im Vergleich zu  $(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(k))$  über wesentlich mehr Struktur verfügen, wird die Geometrie der Familien von singulären Kurven wesentlich rigider sein.

Im Kapitel 2 werden wir deshalb ein Kriterium (Satz 2.2.1 auf Seite 17) dafür angeben, dass eine kompakte, projektive Familie von singulären rationalen Kurven nicht-reduzierte Fasern hat. Weil die Familien von singulären Kurven, die wir als Teilfamilie des Raumes der minimalen rationalen Kurven erhalten, aber stets kompakt sind, und nur generisch reduzierte Fasern haben, liefert das Kriterium erhebliche Einschränkungen an die möglichen Teilfamilien. Weil abgeschlossene, nicht-kompakte Familien von rationalen Kurven traditionell als “spaltend” bezeichnet werden, kann man den Satz 2.2.1 als ein “Spaltungskriterium” auffassen. Dieses Kriterium ist das wesentliche Resultat des ersten Teiles dieser Arbeit. Es kann als natürliches Pendant des Bend-and-Break-Argumentes von S. Mori verstanden werden.

Im Kapitel 3 werden wir das Spaltungskriterium auf die Teilfamilie der minimalen rationalen Kurven an, die singulär sind. Damit können wir viele der oben aufgeworfenen Fragen beantworten. Als unmittelbare Anwendung erhalten wir eine Charakterisierung des projektiven Raumes, die einige der bekannten Resultate verbessert. Die Ergebnisse des Kapitels 3



setzen nicht voraus, dass  $X$  eine Mannigfaltigkeit ist; mit Ausnahme der Charakterisierung des projektiven Raumes gelten alle Sätze auch für projektive Varietäten, die nicht einmal normal sein müssen. Am Ende des Kapitels geben wir ein Beispiel vom Y. Miyaoka, das zeigt, dass alle Ergebnisse scharf sind. Bessere Resultate kann man demnach nur erhoffen, wenn man zusätzliche Kompaktheitsannahmen macht oder die Regularität von  $X$  voraussetzt.

Das Spaltungskriterium kann auch als ein notwendiges Kriterium für die Projektivität eines Bündels von singulären rationalen Kurven verstanden werden. Das wirft die Frage auf, ob es eine vollständige Charakterisierung der projektiven Bündel gibt. Eine solche Charakterisierung wird im Kapitel 4 gegeben werden. Dabei werden wir uns im Hinblick auf die Ergebnisse der Kapitel 2 und 3 auf Bündel von singulären ebenen Kubiken über glatten Kurven beschränken, weil nur solche Bündel in unserer Situation auftreten. Es wird sich zeigen, dass die Menge der projektiven Bündel weder offen noch abgeschlossen in der Menge aller Bündel ist. Das Resultat kann auch als eine Aussage über die Moduli der Bündel von singulären Kurven aufgefasst werden.

**Kontaktmannigfaltigkeiten.** Ab dem Kapitel 5 werden wir die rationalen Kurven auf komplexen Kontaktmannigfaltigkeiten betrachten. Kontaktmannigfaltigkeiten sind Mannigfaltigkeiten, auf denen ein nicht-entartetes Hyperebenenfeld existiert. Die Geometrie dieser Räume ist besonders reich, und Kontaktmannigfaltigkeiten sind von erheblichem Interesse, weil sie als Twistorräume über Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit quaternion-Kählerscher Holonomiegruppe auftreten und deshalb für die Klassifikation der Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit spezieller Holonomie ganz wesentlich sind. Das Kapitel 5 dient der Einführung in den Problemkreis und der Darlegung der bekannten Ergebnisse.

In Kapitel 6 werden Eigenschaften der Familie der minimalen rationalen Kurven auf einer Kontaktmannigfaltigkeit bestimmt. Dabei wird die Charakterisierung des projektiven Raumes aus Kapitel 3 verwendet, um zu zeigen, dass das kanonische Bündel  $-K_X$  in allen interessanten Fällen stets ein Vielfaches eines Geradenbündels  $L$  ist, welches die minimalen Kurven mit Vielfachheit 1 schneidet. Auf der anderen Seite wird das Bündel  $L$  isomorph zu dem Quotienten des Tangentialbündels nach dem Hyperebenenfeld sein. Diese sehr spezielle Geometrie gibt erhebliche Einschränkungen an die Möglichkeiten, eine minimale rationale Kurve auf einer Kontaktmannigfaltigkeit zu bewegen. Durch ein genaues Studium dieser Beschränkungen können wir einige der Aussagen aus Kapitel 3 verbessern. Dies betrifft vor allem die Dimensionsabschätzung für die Teilfamilie der singulären rationalen Kurven. Zusätzlich können wir zeigen, dass die Tangentialabbildung  $\tau_x$  generisch injektiv ist.

Weil nach dem Resultat der Arbeit [34] alle projektiven Kontaktmannigfaltigkeiten  $X$  mit  $b_2(X) > 1$  stets von der Form  $X \cong \mathbb{P}(T_Y)$  sind, wobei  $T_Y$  das Tangentialbündel einer projektiven Mannigfaltigkeit  $Y$  bezeichnet, sind die Kontaktmannigfaltigkeiten mit  $b_2(X) = 1$  von besonderem Interesse. Diese Räume werden in Kapitel 7 untersucht. Das Hauptziel des Kapitels ist der Beweis einer Vermutung von C. LeBrun: wir zeigen, dass es auf einer Kontaktmannigfaltigkeit  $X$  mit  $b_2(X) = 1$  nur dann mehr als eine Kontaktstruktur gibt, wenn  $X \cong \mathbb{P}_{2n+1}$  ist. Schließlich zeigen wir noch einen Satz über die Normalisierung des Ortes der minimalen rationalen Kurven, die einen vorgegebenen allgemeinen Punkt enthalten.

**Frühere Veröffentlichungen.** Die meisten Ergebnisse dieser Schrift sind in vorangegangenen Arbeiten enthalten. Das Spaltungskriterium 2.2.1 aus Kapitel 2 und die Anwendungen, die im Kapitel 3 gegeben werden, sind in der Arbeit [31] dargelegt; eine Übersicht

über die verwendeten Methoden wurde schon in dem Kongressbeitrag [30] gebracht. Die Charakterisierung der projektiven Bündel von singulären Kubiken, die im Kapitel 4 gegeben wird, ist das Ergebnis der Arbeit [32]. Die Kapitel 6 und 7 über die Kontaktmannigfaltigkeiten gehen im wesentlichen auf die Arbeit [33] zurück.

Die Ergebnisse über die Injektivität der Tangentialabbildung auf Kontaktmannigfaltigkeiten (Abschnitt 7.2 ab Seite 68) und die Normalisierung des Ortes der Kurven, die einen festen Punkt enthalten (Abschnitt 7.3 ab Seite 70) sind vor dieser Arbeit noch nicht veröffentlicht worden.

**Sprache und Notation.** In dieser Arbeit verwenden wir die Sprache der algebraischen Geometrie, wie sie in dem Standardlehrbuch [18] eingeführt wurde. Bei den Bezeichnungen für die Parameterräume und den Raum der rationalen Kurven wird unsere Notation mit der des Buches [36] kompatibel sein.

Um technische Schwierigkeiten zu vermeiden werden wir in der gesamten Arbeit – soweit nicht explizit anders vermerkt – ausschließlich Varietäten betrachten, die über  $\mathbb{C}$  definiert sind. Die meisten Ergebnisse der Kapitel 2 und 3 gelten allerdings auch über algebraisch abgeschlossenen Körpern beliebiger Charakteristik – wir verweisen auf die Originalarbeit [31].

**Danksagungen.** Dank schulde ich vor allem Thomas Peternell und Frank-Olaf Schreyer und den Mitarbeitern der Lehrstühle I und VIII am Institut für Mathematik an der Universität Bayreuth für jahrelange Unterstützung, zahlreiche Diskussionen und eine anregende Arbeitsatmosphäre.

Die meisten Ergebnisse, die in dieser Arbeit zusammengefasst sind, wurden im akademischen Jahr 99/00 erarbeitet, als ich Gast am Research Institute for Mathematical Studies (RIMS) in Kyoto war. Der Aufenthalt wurde durch ein Forschungsstipendium der Deutschen Forschungsgemeinschaft ermöglicht. Ich möchte mich sehr herzlich bei Y. Miyaoka bedanken, der Gastgeber am RIMS war, und bei den Mitgliedern und Gästen des RIMS, die sehr zur produktiven Arbeitsatmosphäre beigetragen haben. Ich habe sehr von vielen Diskussionen mit Y. Eliashberg, S. Helmke, S. Kovács, Y. Miyaoka und S. Mori profitiert.

Die Ergebnisse des Kapitels 4 wurden ausgearbeitet als ich Gast am Korea Institute for Advanced Studies in Seoul war. Ich möchte mich ebenfalls bei J.-M. Hwang für die Einladung nach Korea und für viele Gespräche bedanken.

## Rationale Kurven auf projektiven Mannigfaltigkeiten

Die Deformationstheorie der algebraischen Varietäten ist ein Teilgebiet der algebraischen Geometrie in dem es dem Einsteiger nicht leicht gemacht wird. Obwohl es eine Reihe von Publikationen zu dem Thema gibt, sind die meisten Ergebnisse recht technisch und der praktische Nutzen ist bei der ersten Durchsicht der Arbeiten schwer abzuschätzen. Wir stellen deshalb in diesem Kapitel die für uns wesentlichen Ergebnisse über die Existenz von rationalen Kurven, den Raum der Morphismen zwischen algebraischen Varietäten und den Raum der rationalen Kurven zusammen. Unsere Hauptreferenz ist das Buch [36], wo die gesamte Theorie dargestellt wird. Wir werden die Notation dieses Buches übernehmen. S. Moris Arbeit [43] über die Hartshorne-Frankel Vermutung ist ebenfalls eine empfohlene Referenz.

### 1.1. Existenz rationaler Kurven

Eines der wichtigsten Resultate, die zum Beweis der Hartshorne-Frankel-Vermutung führten, ist der Satz über die Existenz von rationalen Kurven auf projektiven Mannigfaltigkeiten  $X$ , deren kanonisches Bündel  $K_X$  nicht nef ist. Dieser Satz wurde von S. Mori mit Hilfe einer Reduktion auf Körper endlicher Charakteristik bewiesen. Eine Konstruktion von rationalen Kurven, die ausschließlich über  $\mathbb{C}$  arbeitet, ist nicht bekannt.

**SATZ 1.1.1** (Mori Existenzsatz für rationale Kurven, [43], [44]). *Es sei  $X$  eine projektive Mannigfaltigkeit für die  $K_X$  nicht nef ist. Dann gibt es auf  $X$  eine rationale Kurve  $\ell$  für die gilt:*

$$0 < -K_X \cdot \ell \leq \dim X + 1.$$

Wenn  $X$  sogar Fano ist, dann gibt es durch jeden Punkt von  $X$  eine solche Kurve. □

### 1.2. Die Parametrisierung von Morphismen

Wenn  $X$  und  $C$  projektive Varietäten sind, dann werden wir häufig die Morphismen von  $C \rightarrow X$  parametrisieren, die  $C$  birational auf sein Bild abbilden. Tatsächlich existiert ein Schema  $\text{Hom}_{bir}(C, X)$ , dessen geometrische Punkte 1:1 zu diesen Morphismen korrespondieren. Desweiteren existiert ein “universeller Morphismus”

$$\begin{array}{ccc} \mu : \text{Hom}_{bir}(C, X) \times C & \rightarrow & X \\ (f, c) & \mapsto & f(c). \end{array}$$

Wir verweisen auf [36, chapt. II.1] für ein eingehendes Studium des Hom-Schemas.

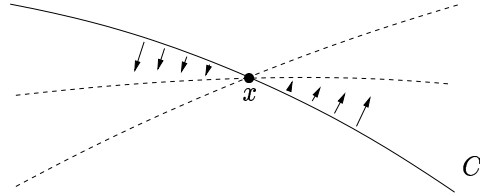


ABBILDUNG 1.2.1. Deformationen und Vektorfelder

**1.2.1. Der Tangentialraum Studium des Hom-Schemas.** Wenn  $X$  glatt ist, dann hat der Tangentialraum an  $\text{Hom}_{\text{bir}}(C, X)$  eine einleuchtende geometrische Interpretation. Wenn ein birationaler Morphismus  $f : C \rightarrow X$  gegeben ist, dann korrespondiert der (Zariski-)Tangentialraum von  $\text{Hom}_{\text{bir}}(C, X)$  an  $f$  auf kanonische Weise zu Schnitten in  $H^0(C, f^*(T_X))$ . Diese Korrespondenz ist in der Abbildung 1.2.1 gezeigt, wo  $C \subset X$  ist und das Vektorfeld in  $H^0(C, f^*(T_X)) = H^0(C, T_X|_C)$  durch Pfeile angedeutet ist.

Es gibt eine holomorphe Abbildung

$$k : H^0(C, f^*(T_X)) \rightarrow H^1(C, f^*(T_X))$$

mit  $k(0) = 0$ , so dass eine analytische Umgebung von  $f$  isomorph zu einer analytischen Umgebung der 0 in der schementheoretischen Faser  $k^{-1}(0)$  ist. Das hat wichtige Konsequenzen:

- (1) Die Dimension von  $\text{Hom}_{\text{bir}}(C, X)$  kann durch die folgende Differenz abgeschätzt werden:

$$\dim \text{Hom}_{\text{bir}}(C, X) \geq \dim H^0(C, f^*(T_X)) - \dim H^1(C, f^*(T_X))$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist die "erwartete Dimension" von  $\text{Hom}_{\text{bir}}(C, X)$ . Wenn  $C$  eine Kurve ist, ist die erwartete Dimension eine Euler-Charakteristik von  $f^*(T_X)$  und kann deshalb bequem mit Hilfe des Satzes von Riemann-Roch ausgerechnet werden.

- (2) Wenn  $\text{Hom}_{\text{bir}}(C, X)$  bei  $f$  die erwartete Dimension hat, dann ist  $\text{Hom}_{\text{bir}}(C, X)$  ein lokal vollständiger Durchschnitt und deshalb insbesondere Cohen-Macaulay.
- (3) Wenn  $H^1(C, f^*(T_X))$  verschwindet, dann ist  $\text{Hom}_{\text{bir}}(C, X)$  an der Stelle  $f$  glatt.

Wenn  $c \in C$  und  $x \in X$  geometrische Punkte sind, können wir einen völlig analogen Parameterraum für die Morphismen konstruieren, die  $c$  auf  $x$  abbilden. Dieser Raum wird mit  $\text{Hom}_{\text{bir}}(C, X, c \mapsto x)$  bezeichnet. Der Tangentialraum an  $\text{Hom}_{\text{bir}}(C, X, c \mapsto x)$  an einem Punkt  $f$  korrespondiert zu  $H^0(C, f^*(T_X) \otimes \mathcal{J}_c)$ , wobei  $\mathcal{J}_c \subset \mathcal{O}_C$  die Idealgarbe des Punktes  $c$  bezeichnet.

**1.2.2. Dimension des Hom-Schemas.** Im Spezialfall wo  $X$  glatt,  $C \cong \mathbb{P}_1$  und  $f \in \text{Hom}_{\text{bir}}(\mathbb{P}_1, X)$  ein Morphismus ist, dessen Bild einen Punkt  $x \in X$  enthält, liefert der Satz von Riemann-Roch die folgende untere Schranke für die Dimension des Deformationsraumes:

$$(1.2.1) \quad \begin{aligned} \dim_{[f]} \text{Hom}_{\text{bir}}(\mathbb{P}_1, X) &\geq -K_X \cdot \ell + \dim X \\ \dim_{[f]} \text{Hom}_{\text{bir}}(\mathbb{P}_1, X, [0 : 1] \mapsto x) &\geq -K_X \cdot \ell \end{aligned}$$

wobei  $\ell := \text{Image}(f)$  ist.

### 1.3. Der Raum der rationalen Kurven

Die Gruppe  $\mathbb{P}SL_2$ , also die Automorphismengruppe der projektiven Gerade, wirkt auf die Normalisierung  $\text{Hom}_{bir}^n(\mathbb{P}_1, X)$  von  $\text{Hom}_{bir}(\mathbb{P}_1, X)$ . S. Mori hat in seiner Arbeit [43, lem. 9] gezeigt, dass der geometrische Quotient im Sinne von D. Mumford [14] existiert. Nach [36, thm. II.2.15] existiert damit ein kommutatives Diagramm

$$(1.3.1) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mu & & \\ & & \curvearrowright & & \\ \text{Hom}_{bir}^n(\mathbb{P}_1, X) \times \mathbb{P}_1 & \xrightarrow{U} & \text{Univ}^{rc}(X) & \xrightarrow{\iota} & X \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \\ \text{Hom}_{bir}^n(\mathbb{P}_1, X) & \xrightarrow{u} & \text{RatCurves}^n(X) & & \end{array}$$

wobei  $u$  und  $U$  prinzipale  $\mathbb{P}SL_2$ -Bündel sind und  $\pi$  ein  $\mathbb{P}_1$ -Bündel ist<sup>1</sup>. Die Einschränkung des ‘‘Auswertungsmorphismus’’  $\iota$  auf eine beliebige Faser von  $\pi$  ist ein Morphismus, der die Faser birational auf das Bild abbildet. Wir bezeichnen den Quotientenraum  $\text{RatCurves}^n(X)$  als den ‘‘Raum von rationalen Kurven auf  $X$ ’’<sup>2</sup>.

Weil wir den Raum  $\text{Hom}_{bir}(\mathbb{P}_1, X)$  bei der Konstruktion von  $\text{RatCurves}^n(X)$  normalisiert haben, gibt es im Allgemeinen keine 1:1-Korrespondenz zwischen den Punkten von  $\text{RatCurves}^n(X)$  und den rationalen Kurven auf  $X$ : Es ist möglich, dass es mehrere Punkte auf  $\text{RatCurves}^n(X)$  gibt, die dieselbe Kurve bezeichnen. Das folgende, triviale Beispiel zeigt, wie so etwas passieren kann.

**BEISPIEL 1.3.1.** Es sei  $X := C \times \mathbb{P}_1$ , wobei  $C$  eine nicht-rationale Kurve ist, so dass die Normalisierungsabbildung  $\eta : \tilde{C} \rightarrow C$  nicht bijektiv ist. Weil die Bilder rationaler Kurven nach dem Satz von Lüroth wieder rational sind, sind die rationalen Kurven in  $X$  genau die Fasern der Projektionsabbildung  $\pi : X \rightarrow C$ . Also ist der Raum  $\text{RatCurves}^n(X)$  kanonisch isomorph zu  $\tilde{C}$ , obwohl die Menge der rationalen Kurven zu  $C$  korrespondiert.

Die Menge der Kurven, die zu mehr als einem Punkt in  $\text{RatCurves}^n(X)$  gehören, ist immerhin abgeschlossen. Wir werden trotz dieses Sachverhaltes in Situationen, in denen Missverständnisse unwahrscheinlich sind, häufig Punkte in  $\text{RatCurves}^n(X)$  und die zugehörigen Kurven in  $X$  mit demselben Symbol bezeichnen.

**1.3.1. Rationale Kurven, die einen vorgegebenen Punkt enthalten.** Wir werden im Folgenden häufig nur solche Kurven betrachten, die einen gegebenen Punkt  $x$  enthalten. Dazu ist die folgende Notation sinnvoll.

**NOTATION 1.3.2.** Wenn ein Familie  $H \subset \text{RatCurves}^n(X)$  und ein Punkt  $x \in X$  gegeben ist, dann bezeichnen wir die abgeschlossene Unterfamilie von Kurven, die den Punkt  $x$  enthalten, mit  $H_x$ :

$$H_x := (\pi(\iota^{-1}(x)) \cap H)_{\text{red}}.$$

<sup>1</sup>Ein  $\mathbb{P}_1$ -Bündel ist für uns ein glatter Morphismus dessen Fasern isomorph zu  $\mathbb{P}_1$  sind. Wir nehmen *nicht* an, dass das Bündel in der Zariski-Topologie lokal trivial ist.

<sup>2</sup>Der Buchstabe ‘‘n’’ in  $\text{RatCurves}^n$  ist vielleicht etwas irreführend. Das ‘‘n’’ hat nichts mit der Dimension von  $V$  zu tun, sondern weist darauf hin, dass der Parameterraum isomorph zur Normalisierung einer geeigneten quasiprojektiven Untervarietät der Chow-Varietät von  $X$  ist.

Die universelle Familie  $\pi^{-1}(H_x)$  wird mit  $U_x$  bezeichnet. Das Bild von  $U_x$  nennen wir den “Ort der  $H$ -Kurven durch  $x$ ” und schreiben

$$\text{locus}(H_x) := \iota(U_x).$$

Die Einschränkung  $\iota|_{U_x}$  wird mit  $\iota_x$  bezeichnet, die Einschränkung  $\pi|_{U_x}$  heißt  $\pi_x$ .

Auf der anderen Seite existiert nach [36, II.2.16] eine analoge Konstruktion für den Parameterraum  $\text{Hom}_{bir}^n(\mathbb{P}_1, X, [0 : 1] \mapsto x)$

$$(1.3.2) \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{bir}^n(\mathbb{P}_1, X, [0 : 1] \mapsto x) \times \mathbb{P}_1 & \xrightarrow{U_x} & \text{Univ}^{rc}(x, X) \xrightarrow{\tilde{\iota}_x} X \\ \downarrow & & \downarrow \pi_x \\ \text{Hom}_{bir}^n(\mathbb{P}_1, X, [0 : 1] \mapsto x) & \xrightarrow{u_x} & \text{RatCurves}^n(x, X) \end{array}$$

$\mu$  (arc above  $U_x$ )

Die Abbildungen  $U_x$  und  $u_x$  sind dieses Mal prinzipale  $\mathbb{B}$ -Bündel, wobei  $\mathbb{B}$  eine Borel-Gruppe in  $\mathbb{P}SL_2$  bezeichnet; die Gruppe  $\mathbb{B}$  ist also isomorph zur Gruppe der Automorphismen des  $\mathbb{P}_1$ , die den vorgegebenen Punkt  $[0 : 1]$  fixieren.

**1.3.2. Vergleich der Parameterräume.** Wir werden in diesem Abschnitt den Zusammenhang zwischen den Räumen  $\text{RatCurves}^n(X)$  und  $\text{RatCurves}^n(x, X)$  beschreiben. Weil dem Autor keine Referenz bekannt ist, wird dies in großer Ausführlichkeit geschehen.

Der Raum  $\text{RatCurves}^n(x, X)$  ist im Allgemeinen nicht in  $\text{RatCurves}^n(X)$  eingebettet. Der Grund ist, dass die Untervarietäten  $H_x \subset H \subset \text{RatCurves}^n(X)$ , die wir oben definiert haben, im Allgemeinen nicht normal sind. Dies gilt selbst dann nicht, wenn  $H$  eine irreduzible Komponente von  $\text{RatCurves}^n(X)$  ist – wir werden später im Abschnitt 3.5 ab Seite 32 ein explizites Beispiel angeben. Tatsächlich könnte es sogar sein, dass die Teilfamilie  $H_x$  ganz im nicht-normalen Ort von  $\text{RatCurves}^n(X)$  enthalten ist und es überhaupt keine Abbildung von  $\text{RatCurves}^n(x, X)$  nach  $\text{RatCurves}^n(X)$  gibt. Falls  $x$  aber ein allgemeiner Punkt ist, haben wir zumindest die folgende Aussage:

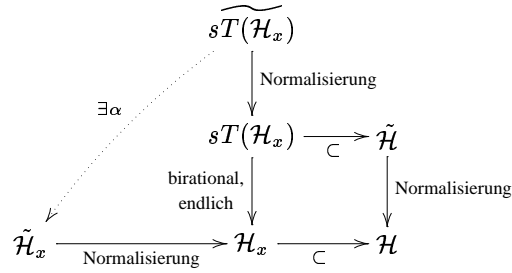
**PROPOSITION 1.3.3.** *Es sei  $H$  eine irreduzible Komponente des Raumes  $\text{RatCurves}^n(X)$  und  $x \in X$  sei ein allgemeiner Punkt. Dann ist jede irreduzible Komponente der Normalisierung  $\tilde{H}_x$  isomorph zu einer irreduziblen Komponente von  $\text{RatCurves}^n(x, X)$ .*

Achtung! Bei den Anwendungen der Proposition 1.3.3 ist unbedingt zu berücksichtigen, dass der Begriff eines “allgemeinen Punktes” von der Wahl der irreduziblen Komponente  $H$  abhängt. Um eine Aussage zu erhalten, die für alle Komponenten gilt, wird es nötig sein, einen “sehr allgemeinen Punkt” zu wählen. Ein sehr allgemeiner Punkt ist ein Punkt, der im Komplement einer abzählbaren Vereinigung von Hyperebenen liegen, die mit den Komponenten von  $\text{RatCurves}^n(X)$  korrespondieren.

**BEWEIS.** Es sei  $\mathcal{H} \subset \text{Hom}_{bir}(\mathbb{P}_1, X)$  die irreduzible Komponente, die zu  $H$  gehört. Wir identifizieren  $\text{Hom}_{bir}(\mathbb{P}_1, X, [0 : 1] \mapsto x)$  mit einem Unterschema von  $\text{Hom}_{bir}(\mathbb{P}_1, X)$  und betrachten die Komponenten von  $(\text{Hom}_{bir}(\mathbb{P}_1, X, [0 : 1] \mapsto x))_{\text{red}}$ , die wir als Durchschnitte

$$\mathcal{H}_x := (\mathcal{H} \cap \text{Hom}_{bir}(\mathbb{P}_1, X, [0 : 1] \mapsto x))_{\text{red}}$$

erhalten. Weil  $x$  ein allgemeiner Punkt ist, ist keine Komponente von  $\mathcal{H}_x$  im nicht-normalen Ort von  $\mathcal{H}$  enthalten. Es macht also Sinn, von der strikten Transformierten  $sT(\mathcal{H}_x)$  von  $\mathcal{H}_x$  in der Normalisierung  $\tilde{\mathcal{H}}$  zu sprechen. Wir erhalten so das folgende kommutative Diagramm



Nach der universellen Eigenschaft der Normalisierung existiert der birationale, endliche Morphismus  $\alpha$ . Nach Zariskis Hauptsatz ist  $\alpha$  dann ein Isomorphismus, und wir erhalten automatisch einen Morphismus  $\tilde{\gamma} : \tilde{\mathcal{H}}_x \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ . Die universelle Eigenschaft der Quotientenkonstruktion (siehe etwa [38, II.3.2]) liefert sofort einen Morphismus  $\gamma$  zwischen den Quotienten.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\mathcal{H}}_x & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & \tilde{\mathcal{H}} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{\mathcal{H}}_x/\mathbb{B} & \xrightarrow{\gamma} & \tilde{\mathcal{H}}/\mathbb{P}SL_2
 \end{array}$$

Die Behauptung ist also gezeigt, wenn wir zeigen, dass  $\gamma$  generisch injektiv ist.

Dazu bemerken wir folgendes: Wenn  $f \in \text{Hom}_{bir}(\mathbb{P}_1, X, [0 : 1] \mapsto x)$  ein Morphismus  $f : \mathbb{P}_1 \rightarrow \ell \subset X$  ist, der bei  $[0 : 1]$  injektiv ist<sup>3</sup>, dann geht jeder andere birationale Morphismus  $g : \mathbb{P}_1 \rightarrow \ell$  mit  $g([0 : 1]) = x$  aus  $f$  durch Komposition mit einem Automorphismus hervor, der  $[0 : 1]$  stabilisiert. Also ist  $\gamma$  bei  $u_x(f)$  injektiv.

Konsequenz: um zu zeigen, dass  $\gamma$  generisch injektiv ist, genügt es, zu zeigen, dass die generische Kurve  $\ell \in H_x$  bei  $x$  glatt ist, weil dann jeder birationale Morphismus  $f : \mathbb{P}_1 \rightarrow \ell$  mit  $f([0 : 1]) = x$  bei  $[0 : 1]$  injektiv ist. Die Glattheit der Kurven folgt aber unmittelbar, weil  $x$  als allgemeiner Punkt gewählt wurde.  $\square$

Als Korollar zum Beweis halten wir noch die folgende Aussage fest:

**KOROLLAR 1.3.4.** *Die Normalisierungsabbildung  $\tilde{H}_x \rightarrow H_x$  ist bijektiv, wenn alle Kurven  $\ell \in H_x$  glatt sind*  $\square$

**1.3.3. Rationales Kurven, die einen allgemeinen Punkt enthalten.** Es sei  $X$  eine projektive Mannigfaltigkeit,  $H$  eine irreduzible Komponente des Raumes  $\text{RatCurves}^n(X)$  und  $x \in X$  sei ein allgemeiner Punkt. Wenn  $\ell \in H$  eine Kurve ist, die  $x$  enthält, und wenn  $f : \mathbb{P}_1 \rightarrow \ell$  eine Parametrisierung dieser Kurve mit  $f([0 : 1]) = x$  bezeichnet, dann zeigt eine elementare Betrachtung der Tangentialabbildung  $T\mu$  des universellen Morphismus, dass das zurückgezogene Bündel  $f^*(T_X)$  ample ist. Diese Beobachtung wurde vielleicht zum ersten Mal in der Arbeit [27] gemacht.

<sup>3</sup>„Injektiv bei  $[0 : 1]$ “ bedeutet, dass  $f^{-1}(f([0 : 1])) = \{[0 : 1]\}$  ist.

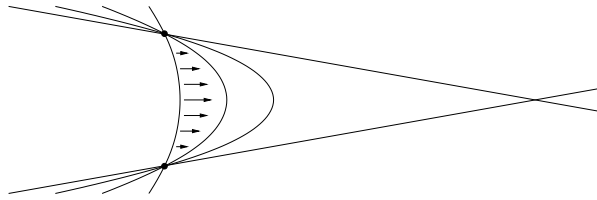


ABBILDUNG 1.3.1. Deformation mit zwei Fixpunkten

Es folgt demnach, dass die Homologiegruppen  $H^1(\mathbb{P}_1, f^*(T_X))$  und  $H^1(\mathbb{P}_1, f^*(T_X) \otimes \mathcal{J}_{[0:1]})$  beide verschwinden. Also ist sowohl  $\text{Hom}_{\text{bir}}(\mathbb{P}_1, X)$  als auch  $\text{Hom}_{\text{bir}}(\mathbb{P}_1, X, [0:1] \mapsto x)$  glatt bei  $f$ . Als Konsequenz ergibt sich:

PROPOSITION 1.3.5 (Glattheitsatz, [36, cor. III.3.11.5]). *Es sei  $X$  eine projektive Mannigfaltigkeit,  $H$  eine irreduzible Komponente des Raumes  $\text{RatCurves}^n(X)$  und  $x \in X$  sei ein allgemeiner Punkt. Wenn  $\tilde{H}_x \subset \text{RatCurves}(x, X)$  die Normalisierung von  $H_x$  ist, dann ist  $\tilde{H}_x$  glatt.*  $\square$

**1.3.4. Kompaktheit des Raumes der rationalen Kurven.** Die irreduziblen Komponenten des Raumes  $\text{RatCurves}^n(X)$  sind im Allgemeinen nicht kompakt, weil eine rationale Kurve gegen eine Summe von mehreren Kurven oder gegen eine Kurve deformieren kann, die nicht generisch reduziert ist. Abbildung 1.3.1 zeigt eine solche Deformation. Um diese Art von Deformation auszuschließen und um kompakte Parameterräume zu erhalten, ist es oft sinnvoll, nur Kurven vom minimalen Grad zu betrachten. Zu diesem Zweck definieren wir die folgenden Zahlen

$$\begin{aligned} m &:= \min\{\deg C \mid C \text{ eine rationale Kurve in } X\} \\ m(x) &:= \min\{\deg C \mid C \text{ eine rationale Kurve in } X, \text{ die } x \text{ enthält}\} \end{aligned}$$

wobei wir zusätzlich vereinbaren, dass  $m$  und  $m(x)$  gleich 0 sein sollen, wenn es auf  $X$  keine rationalen Kurven gibt, oder wenn es keine Kurven gibt, die den Punkt  $x$  enthalten. Das folgende Kompaktheitskriterium geht auf S. Moris Arbeit [44] zurück. Eine ausführliche Formulierung und ein Beweis findet sich in [36, II.2.14].

SATZ 1.3.6 (Kompaktheitsatz). *Es sei  $H \subset \text{RatCurves}^n(X)$  eine irreduzible Komponente. Dann gilt*

- (1) *Wenn die Kurven, die von  $H$  parametrisiert werden, Grad kleiner als  $2m$  haben, dann ist  $H$  kompakt.*
- (2) *Wenn für einen allgemeinen Punkt  $x \in X$  die Unterfamilie  $H_x$  nicht leer ist und wenn der Grad der Kurven, die von  $H$  parametrisiert werden, kleiner als  $m+m(x)$  ist, dann ist  $H_x$  kompakt.*

Traditionell werden kompakte Untervarietäten von  $\text{RatCurves}^n(V)$  auch als “nicht-spaltende Familien von rationalen Kurven” bezeichnet.

#### 1.4. Moris Spaltungskriterium: Biegen und Brechen

Eine elementare, aber sehr nützliche Argumentation die als “Mori’s Bend-and-Break” bekannt geworden ist, zeigt, dass eine Deformation von rationalen Kurven, die zwei Punkte fix lässt, im Limit stets zu reduziblen oder zu generisch nicht-reduzierten Kurven führt. Die



Abbildung 1.3.1 illustriert diesen Prozess. Das Argument erscheint zum ersten Mal in [43]; wir verweisen auf [36, II.5].

SATZ 1.4.1 (Starrheitssatz für rationale Kurven). *Es sei das folgende Diagramm von projektiven Morphismen zwischen eigentlichen, positiv-dimensionalen Varietäten gegeben.*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\gamma} & X \\ \pi \downarrow & & \\ & & H \end{array}$$

*Wir nehmen an, dass  $\pi$  äquidimensional ist und dass die allgemeine  $\pi$ -Faser eine irreduzible rationale Kurve ist. Weiter nehmen wir an, dass  $\gamma$  generisch endlich ist. Wenn es mehr als einen Schnitt  $\sigma_i \subset X$  gibt, der von  $\gamma$  auf einen Punkt abgebildet wird, dann gibt es einen Punkt  $y \in Y$ , so dass  $\pi^{-1}(y)$  nicht irreduzibel oder nicht generisch reduziert ist.  $\square$*

Als Korollar erhalten wir eine erste Antwort auf die Frage (3) aus der Einleitung: zwei hinreichend allgemeine Punkte  $x$  und  $y$  legen eine minimale rationale Kurve zwar nicht eindeutig fest, aber es gibt immerhin nur endlich viele Kurven, die  $x$  und  $y$  enthalten. Im Abschnitt 3.5 ab Seite 32 werden wir ein Beispiel bringen, wo es tatsächlich mehr als eine minimale Kurve durch zwei generische Punkte gibt. Wir werden das Resultat aber im Satz 3.3.1 auf Seite 28 für Kurven von kleinem Grad verbessern.

KOROLLAR 1.4.2 (Mori's Bend-and-Break). *Wenn  $x \in X$  ein Punkt ist und wenn  $H_x \subset \text{RatCurves}^n(X)$  eine kompakte Familie von Kurven ist, die den Punkt  $x$  enthalten, dann ist die Abbildung  $\iota_x : U_x \rightarrow \text{locus}(H_x) \subset X$  endlich. Insbesondere gilt*

$$\dim \text{locus}(H_x) = \dim H_x + 1.$$

$\square$

## 1.5. Bündel von rationalen Kurven

Wir werden im Folgenden häufig mit Faserräumen arbeiten deren Fasern (möglicherweise singuläre) rationale Kurven sind. Die Arbeit mit diesen Räumen wird über Körpern der Charakteristik Null dadurch vereinfacht, dass die Normalisierung eines solchen Faserraumes automatisch ein  $\mathbb{P}_1$ -Bündel ist. Wir verweisen auf [36, thm. II.2.8] für einen Beweis.

SATZ 1.5.1. *Es sei das folgende Diagramm von surjektiven Abbildungen zwischen projektiven Varietäten gegeben, die über  $\mathbb{C}$  definiert sind.*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\text{Normalisierung}} & X \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \tilde{Y} & \xrightarrow{\text{Normalisierung}} & Y \end{array}$$

*Wenn alle Fasern des Morphismus  $\pi$  irreduzible und generisch reduzierte rationale Kurven sind, dann ist  $\tilde{X}$  ein  $\mathbb{P}_1$ -Bündel über  $\tilde{Y}$ .  $\square$*

Dieser Satz ist in endlicher Charakteristik falsch; um ein  $\mathbb{P}_1$ -Bündel zu erhalten, ist es oft nötig, die Normalisierung des Basisraumes mit einem endlichen, rein inseparablen Morphismus zu komponieren und einen Basiswechsel durchzuführen. Dies ist der Hauptgrund,

warum es bislang keine zum Satz 3.4.1 analoge Charakterisierung des projektiven Raumes über Körpern endlicher Charakteristik gibt – wir verweisen auf die Bemerkungen nach Satz 3.3.2 auf Seite 30.

Weil der Beweis in [36] schwierig ist, ist es in diesem Zusammenhang – obwohl sich die vorliegende Arbeit eigentlich nur mit Varietäten über  $\mathbb{C}$  befasst – sicher instruktiv, das folgende, einfache Beispiel zu betrachten, das dem Autor von Y. Miyaoka mitgeteilt wurde.

BEISPIEL 1.5.2. Wir betrachten die quasiprojektive Fläche

$$X := \{([x : y : z], t) \in \mathbb{P}_2 \times \mathbb{A} \mid z^3 t = zy^2 - x^3\}$$

mit dem natürlichen Projektionsmorphismus  $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}$ .

Wenn  $X$  über  $\mathbb{C}$  definiert ist, dann rechnet man direkt nach, dass  $X$  glatt ist und dass alle Fasern  $(X_t)_{t \neq 0}$  glatte elliptische Kurven sind.

Wenn  $X$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  der Charakteristik 3 definiert ist, dann zeigt die analoge Rechnung wieder, dass  $X$  eine glatte Varietät ist. Die Fasern von  $\pi$  sind allerdings singulär, und zwar an der Stelle

$$(X_t)_{\text{Sing}} = \{([x : 0 : 1], t) \in \mathbb{P}_2 \times \mathbb{A} \mid x^3 + t = 0\}$$

Das zeigt bereits, dass Seidenbergs Theorem (“Generische Fasern von Abbildungen zwischen normalen Varietäten sind normal.”, siehe auch [5, thm. 1.7.1]) in endlicher Charakteristik nicht gilt. Um einzusehen, dass die Fasern  $X_t$  rational ist, bezeichnen wir die (eindeutig bestimmte) dritte Wurzel von  $t$  mit  $\xi \in \mathbb{K}$  und parametrisieren die Faser  $X_t$  durch

$$(1.5.1) \quad \begin{array}{lcl} \iota_x : \mathbb{A} & \rightarrow & X_t \\ c & \mapsto & ([c^2 - \xi : c^3 : 1], t) \end{array}$$

Um  $X$  jetzt in ein  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ -Bündel zu transformieren, führen wir den Basiswechsel  $t \mapsto s^3$  durch. Der Rückzug von  $X$  schreibt sich dann als

$$X' := \{([x : y : z], s) \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{A} \mid z^3 s^3 = zy^2 - x^3\}.$$

Man rechnet nach, dass diese Varietät nicht normal ist. Zum Normalisieren müssen wir eine Variable  $c$  hinzufügen, die der Gleichung  $(x + s)c = y$  genügt. Das ist aber gerade die Variable, die wir in (1.5.1) zur Parametrisierung genommen haben. Dies zeigt, dass die Normalisierung von  $X'$  tatsächlich ein  $\mathbb{P}_1$ -Bündel ist.

## **Teil 1**

# **Familien von singulären Kurven**



## Ein Spaltungskriterium für singuläre Kurven

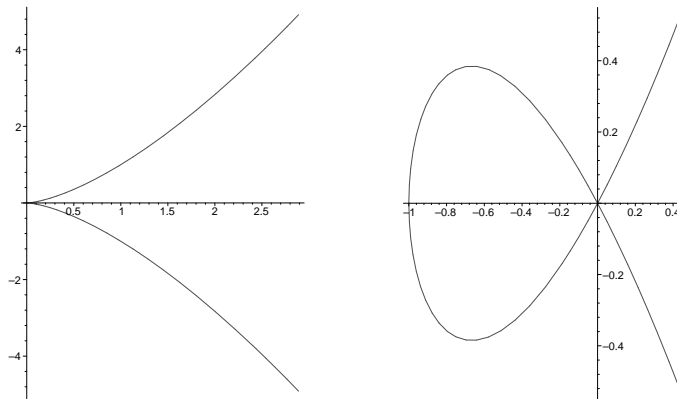
Mori's Bend-and-Break kann als Starrheitsaussage für kompakte Familien von rationalen Kurven aufgefasst werden. Das Thema dieses Kapitels ist es, eine stärkere Aussage für den Fall zu gewinnen, dass alle Kurven, die durch eine kompakte Teilmenge des Raumes  $\text{RatCurves}^n(X)$  gegeben werden, singulär sind. Dazu verwenden wir eine Struktur, die es nur auf polarisierten singulären rationalen Kurven gibt, nämlich die speziellen Punkte, die wir gleich definieren. Danach werden wir im Satz 2.2.1 das Hauptresultat dieses Kapitels angeben.

### 2.1. Spezielle und oskulierende Punkte

Wir erinnern daran, dass es in der projektiven Ebene  $\mathbb{P}_2$  nur zwei Isomorphieklassen von integralen und singulären Kurven vom Grad 3 gibt. Tatsächlich ist jede solche Kurve isomorph zu einer der folgenden beiden Kurven, die in Abbildung 2.1.1 illustriert sind.

$$\begin{aligned} C_0 &:= \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_2 \mid y^2 z = x^3\} \\ C_1 &:= \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_2 \mid y^2 z = x^3 + x^2 z\} \end{aligned}$$

Wir nehmen eine gewisse Verballhornung des Deutschen in Kauf und nennen  $C_0$  eine "kuspitale" Kurve (=Kurve mit Spitze) und  $C_1$  eine "nodale" Kurve (=Kurve mit gewöhnlichem



kuspitale Kubik  $C_0$  (nicht immersiert)

nodale Kubik  $C_1$  (immersiert)

ABBILDUNG 2.1.1. Singuläre ebene Kubiken

Doppelpunkt). Diese Kurven sind für uns sehr wichtig, weil jede singuläre rationale Kurve von  $C_0$  oder  $C_1$  dominiert wird.

DEFINITION 2.1.1. Es sei  $C$  eine Kurve und  $\eta : \tilde{C} \rightarrow C$  die Normalisierung. Wir sagen, dass  $C$  “immersiert” ist, wenn  $\eta$  an allen Punkten Rang 1 hat.

**2.1.1. Oskulierende Punkte auf ebenen Kubiken.** Ein Geradenbündel  $L$  auf  $C_0$  oder  $C_1$  definiert eine Menge von Punkten, die wir “ $L$ -oskulierend” nennen.

DEFINITION 2.1.2. Es sei  $C$  eine integrale, singuläre ebene Kubik und  $L \in \text{Pic}^k(C)$  ein Geradenbündel vom Grad  $k > 0$ . Wir nennen einen glatten Punkt  $\sigma \in C_{\text{Reg}}$  einen “ $L$ -oskulierenden Punkt”, wenn  $\mathcal{O}_C(k \cdot \sigma) \cong H$  ist.

Falls  $C$  eine eingebettete kubische Kurve in  $\mathbb{P}_2$  ist, dann sind die glatten Punkte in  $C$ , die nicht allgemein bezüglich des Geradenbündels  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$  sind, gerade die Wendepunkte der Kurve. In der klassischen Sprache (siehe zum Beispiel [12, I.C]) bezeichnet man diese Punkte als “hyperoskulierend”.

Das folgende Lemma zeigt, wie man die  $L$ -oskulierenden Punkte auf einer gegebenen Kubik ausrechnet.

LEMMA 2.1.3. *Es sei  $C_1$  eine nodale ebene Kubik und es sei  $p \in (C_1)_{\text{Reg}}$  ein glatter Punkt. Wir fixieren eine Identifikation  $\iota : \mathbb{C}^* \rightarrow (C_1)_{\text{Reg}}$ , so dass  $\iota^{-1}(p) = 1$  ist und setzen*

$$(\sigma_i)_{i=1\dots k} = \{\iota(\xi) \mid \xi^k = 1\}.$$

*Dann sind die  $\sigma_i$  die oskulierende Punkte für das Geradenbündel  $\mathcal{O}_{C_1}(k \cdot p)$ . Insbesondere folgt, dass es genau  $k$  oskulierende Punkte für  $\mathcal{O}_{C_1}(k \cdot p)$  gibt.*

BEWEIS. In [18, Ex. II.6.7] wurde bewiesen, dass die Abbildung  $\iota$  einen Gruppenmorphimus

$$\begin{aligned} \iota' : \mathbb{C}^* &\rightarrow \text{Pic}^0(C_1) \\ t &\mapsto \mathcal{O}_{C_1}(p - \iota(t)) \end{aligned}$$

induziert. Insbesondere gilt  $\mathcal{O}_{C_1}(k \cdot p) \cong \mathcal{O}_{C_1}(k \cdot \iota(t))$  dann und nur dann, wenn  $\mathcal{O}_{C_1}(p - \iota(t))^{\otimes k} \cong \mathcal{O}_{C_1}$ , also wenn  $\iota'(t)$  eine  $k$ te Einheitswurzel ist.  $\square$

Analog erhalten wir das entsprechende Resultat für kuspidele ebene Kurven.

LEMMA 2.1.4. *Es sei  $C_0$  eine kuspidele ebene Kubik und  $L \in \text{Pic}(C_0)$  ein Geradenbündel vom Grad  $k > 0$ . Dann gibt es genau einen  $L$ -oskulierenden Punkt.*  $\square$

**2.1.2.  $L$ -allgemeine Punkte auf singulären rationalen Kurven.** Wir verallgemeinern den Begriff der oskulierenden Punkte für beliebige singuläre rationale Kurven.

DEFINITION 2.1.5. Es sei  $C$  eine irreduzible und reduzierte singuläre rationale Kurve und  $L \in \text{Pic}(C)$  ein Geradenbündel von positivem Grad. Wir sagen, dass ein glatter Punkt  $x \in C$  “allgemein bezüglich  $L$ ” ist, wenn für alle birationalen Morphismen  $\beta_i : C_i \rightarrow C$  und für alle  $i \in \{0, 1\}$  der Punkt  $\beta_i^{-1}(x)$  kein oskulierender Punkt des Geradenbündels  $\beta_i^*(L)$  ist. Glatte Punkte von  $C$ , die nicht allgemein bezüglich  $L$  sind, heißen “speziell bezüglich  $L$ ”.

Es ist für uns wesentlich, dass für jedes Geradenbündel  $L$  und für jede Kurve  $C$  fast alle Punkte allgemein bezüglich  $L$  sind.

LEMMA 2.1.6. *Die Menge von Punkten in  $C$ , die allgemein bezüglich  $L$  sind, ist Zariski-offen in  $C$ .*

BEWEIS. Wenn  $x \in C$  ein glatter Punkt,  $g \in \text{Aut}(C_i)$  ein Automorphismus und  $\beta_i : C_i \rightarrow C$  ein birationaler Morphismus ist, dann gilt die Isomorphie

$$(g \circ \beta_i)^{-1}(L) \cong \mathcal{O}_{C_i}(k(g \circ \beta_i)^{-1}(x))$$

genau dann, wenn  $\beta^{-1}(L) \cong \mathcal{O}_{C_i}(k\beta_i^{-1}(x))$  ist.

Um das Lemma zu beweisen, genügt es, zu sehen, dass es – bis auf Komposition mit Automorphismen – nur endlich viele birationale Morphismen  $C_i \rightarrow C$  gibt.  $\square$

## 2.2. Formulierung des Spaltungskriteriums

Der folgende Satz ist das Hauptresultat dieses Kapitels. Man beachte die Ähnlichkeit mit Satz 1.4.1 auf Seite 11.

SATZ 2.2.1 (Starrheit von singulären Kurven). *Es sei das folgende Diagramm von surjektiven Morphismen zwischen projektiven, positiv-dimensionalen Varietäten gegeben.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\gamma} & Z \\ \pi \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

Wir nehmen an, dass  $\pi$  äquidimensional ist und dass die allgemeine  $\pi$ -Faser eine irreduzible und singuläre rationale Kurve ist. Weiter nehmen wir an, dass  $\gamma$  einen Schnitt  $\sigma_\infty \subset X$  auf einen Punkt abbildet und auf dem Komplement von  $\sigma_\infty$  endlich ist. Wenn eine der folgenden Eigenschaften gilt:

- (1) Alle  $\pi$ -Fasern sind immersierte Kurven.
- (2) Keine  $\pi$ -Faser ist immersiert und es existiert ein abgeschlossener Punkt  $y \in Y$  mit reduzierter und irreduzibler Faser  $X_y := \pi^{-1}(y)$ , so dass  $\sigma_\infty \cap X_y$  ein glatter Punkt ist, der allgemein bezüglich  $L|_{X_y}$  ist.
- (3) Es gibt ein Geradenbündel  $L \in \text{Pic}(X)$ , dessen Einschränkung auf die Fasern von  $\pi$  Grad 2 hat und es existiert ein abgeschlossener Punkt  $y \in Y$  mit reduzierter und irreduzibler Faser  $X_y := \pi^{-1}(y)$ , so dass  $\sigma_\infty \cap X_y$  ein glatter Punkt ist, der allgemein bezüglich  $L|_{X_y}$  ist.

Dann gibt es einen Punkt  $y \in Y$ , so dass  $\pi^{-1}(y)$  nicht irreduzibel oder nicht generisch reduziert ist.

Der verbleibende Teil des Kapitels 2 ist dem Beweis des Satzes 2.2.1 gewidmet. Der Leser, der zuerst an den Anwendungen interessiert ist, kann den Rest des Kapitels daher beim ersten Lesen vielleicht überspringen und gleich in Kapitel 3 auf Seite 25 weiterlesen. Wir erwähnen, dass die Aussage (1) des Satzes 2.2.1 schon von anderen Autoren bewiesen wurde, vergleiche etwa [7, sect. 2].

Wir werden den Beweis des Satzes 2.2.1 mit Hilfe eines Widerspruchsargumentes führen. Zu diesem Zweck treffen wir für den Rest des Kapitels die folgenden Annahmen.

ANNAHMEN 2.2.2. *Zusätzlich zu den Annahmen von Satz 2.2.1 nehmen wir an, dass alle Fasern von  $\pi$  irreduzibel und generisch reduziert sind. Insbesondere ist die Reduktion einer beliebigen  $\pi$ -Faser eine singuläre rationale Kurve. Weil die Aussage von Satz 2.2.1 stabil unter endlichem Basiswechsel ist und unter der Einschränkung auf beliebige positiv-dimensionale Untervarietäten von  $Y$  ist, nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit für den Rest des Kapitels an, dass  $Y$  eine glatte Kurve ist.*

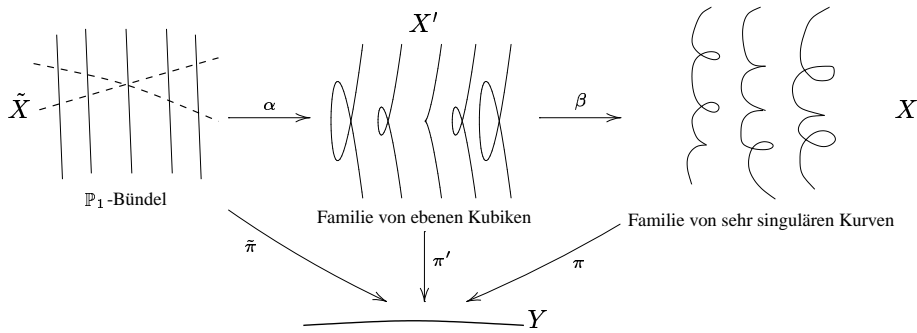


ABBILDUNG 2.3.1. Singuläre Kurven durch ebene Kubiken ersetzen

### 2.3. Eine partielle Auflösung der Singularitäten

Als ersten Schritt im Beweis von Satz 2.2.1 werden wir – nach geeignetem Basiswechsel – eine partielle Auflösung der Singularitäten konstruieren, die die möglicherweise sehr komplizierte Familie  $X$  von singulären Kurven durch eine besser handhabbare Familie von Kurven mit möglichst einfachen Singularitäten ersetzt. Genauer gesagt zeigen wir, dass wir die Familie  $X \rightarrow Y$  durch eine Familie ersetzen können, bei der jede Faser isomorph zu einer ebenen Kubik ist. Die Abbildung 2.3.1 zeigt diesen Prozess. Später werden wir die speziellen Punkte auf den Fasern betrachten, um Schnitte über  $Y$  zu erhalten. Eine vollständige Auflösung der Singularitäten ist für uns aus diesem Grunde nicht von Interesse.

Weil die korrekte Konstruktion des Bündels  $X'$  ziemlich technisch ist, erläutern wir zunächst die prinzipielle Idee. Um einen Morphismus  $\alpha$  wie in der Abbildung 2.3.1 zu definieren, erinnern wir an Satz 1.5.1 auf Seite 11, der besagt, dass die Normalisierung  $\tilde{X}$  von  $X$  die Struktur eines  $\mathbb{P}_1$ -Bündels über  $Y$  hat. Nach geeignetem Basiswechsel enthält das Urbild  $\eta^{-1}(X_{\text{Sing}})$  der Singularitätenmenge von  $X$  einen Doppelschnitt  $\tilde{N}$ , der in der Abbildung 2.3.1 gestrichelt gezeichnet ist. Wir wählen eine Überdeckung  $U_i \subset Y$ , so dass  $\tilde{\pi}^{-1}(U_i) \cong \mathbb{P}_1 \times U_i$  trivial ist und wir

$$\tilde{N} \cap \tilde{\pi}^{-1}(U_i) = \{([y_0 : y_1], x) \in \mathbb{P}_1 \times U_i \mid y_0^2 = g(x)y_1^2\}$$

schreiben können, wobei  $g \in \mathcal{O}(U_i)$  eine Funktion ist. Der Morphismus  $\alpha$  ist dann lokal als

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}_1 \times U_i & \rightarrow & \mathbb{P}_2 \times U_i \\ ([y_0 : y_1], x) & \mapsto & ([y_0^2 y_1 - g(x)y_1^3 : y_0^3 - g(x)y_0 y_1^2 : y_1^3], x) \end{array}$$

gegeben und eine elementare Rechnung zeigt, dass das Bild von  $\alpha$  die Struktur eines Bündels von singulären ebenen Kubiken hat. Genauer gesagt ist für einen Punkt  $y \in Y$  mit Faser  $X_y := \pi^{-1}(y)$  die Faser  $X_y$  nodal, wenn  $\tilde{N}$  die Faser  $\tilde{X}_y := \tilde{\pi}^{-1}(y)$  in zwei unterschiedlichen Punkten schneidet. Die Faser  $X_y$  ist kuspidal, wenn  $\tilde{N} \cap \tilde{X}_y$  ein Doppelpunkt ist.

Im verbleibenden Rest dieses Abschnittes 2.3 werden wir diese Idee technisch korrekt umsetzen.



LEMMA 2.3.1. *Betrachte das folgende Diagramm von surjektiven projektiven Morphismen*

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{N} & \xrightarrow{\subset} & \tilde{X} & \xrightarrow[\text{Normalisierung}]{\eta} & X & \xleftarrow{\supset} & N \\
 & & \searrow^{\exists \alpha} & & \swarrow_{\exists \beta} & & \\
 & & & X' & & & \\
 & & \searrow^{\tilde{\pi}} & \downarrow^{\exists \pi'} & \swarrow_{\pi} & & \\
 & & & Y & & & 
 \end{array}$$

wobei  $\pi$  projektiv ist,  $Y$  eine glatte Kurve ist und wir die folgenden Annahmen machen:

- Alle  $\pi$ -Fasern sind irreduzibel und generisch reduzierte singuläre rationale Kurven.
- Es gibt einen Schnitt  $N \cong Y$  und ein Unterschema  $\tilde{N} \subset \eta^{-1}(N)$ , so dass für alle abgeschlossenen Punkte  $y \in Y$  der schementheoretische Schnitt  $\tilde{\pi}^{-1}(y) \cap N$  ein Null-dimensionales Unterschema der Länge 2 ist.

Dann gibt es eine Faktorisierung  $\eta = \beta \circ \alpha$  über eine Varietät  $X'$ , so dass alle Fasern von  $\pi'$  isomorph zu integralen, singulären ebenen Kubiken sind.

BEWEIS. Setze

$$A := \text{Image}(\eta_*(\mathcal{J}_{\tilde{N}}) \oplus \mathcal{O}_X \rightarrow \eta_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})) \subset \eta_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

wobei  $\mathcal{J}_{\tilde{N}} \subset \mathcal{O}_{\tilde{X}}$  die Idealgarbe von  $\tilde{N}$  ist. Es folgt sofort, dass  $A$  eine kohärente Garbe von  $\mathcal{O}_X$ -Algebren ist. Wir definieren  $X' := \mathbf{Spec}(A)$ . Die Existenz von  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\pi'$  folgt sofort aus der Konstruktion.

Um zu sehen, dass die Fasern von  $\pi'$  vom gewünschten Typ sind, betrachten wir einen beliebigen abgeschlossenen Punkt  $y \in Y$ . Der Beweis ist beendet, wenn wir sehen, dass die Faser  $(\pi')^{-1}(y)$  eine einzige Singularität besitzt, die eine einfache Spitze oder ein gewöhnlicher Doppelpunkt ist. Wenn wir die Basis  $Y$  durch eine geeignete affine Umgebung von  $y$  ersetzen und, falls nötig, einen Basiswechsel durchführen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass es einen effektiven, relativ amplen Divisor  $D \subset X$  gibt, der jede Faser von  $\pi$  in einem einzigen glatten Punkt schneidet. Wir können weiterhin annehmen, dass  $\tilde{X} \cong Y \times \mathbb{P}_1$  ist. Wir schreiben  $U := X \setminus D$ , setzen  $\tilde{U} := \eta^{-1}(U)$  und beachten, dass sowohl  $U$  als auch  $\tilde{U}$  affin sind. Indem wir eine Bündelkoordinate  $z$  auf  $\tilde{X}$  wählen, können wir  $U \cong \text{Spec}(R)$ ,  $Y \cong \text{Spec}(S)$  und  $\tilde{U} \cong \text{Spec}(S \otimes_k \mathbb{C}[z])$  schreiben.

Weil jetzt  $N \cong H$  gilt, können wir  $R$  zerlegen als  $R = I_N \oplus \pi^\#(S)$ . Weil nach Konstruktion gilt, dass  $\eta^\#(I_N(U)) \subset I_{\tilde{N}}$  ist, haben wir die folgende Gleichheit von Ringen

$$\begin{aligned}
 A(U) &= \text{Image}(I_{\tilde{N}} \oplus R \rightarrow S \otimes \mathbb{C}[z]) \\
 &= \text{Image}(I_{\tilde{N}} \oplus S \rightarrow S \otimes \mathbb{C}[z]).
 \end{aligned}$$

Wenn die Bündelkoordinate  $z$  richtig gewählt ist, dann liefert die Tensorierung mit  $\mathbb{C}(y)$

$$\begin{aligned}
 A(U) \otimes \mathbb{C}(y) &= \text{Image}(I_{\tilde{N}} \otimes \mathbb{C}(y) \oplus \mathbb{C}(y) \rightarrow \mathbb{C}(y)[z]) \\
 &= (z^2 - c) + \mathbb{C}(y) \subset \mathbb{C}(y)[z],
 \end{aligned}$$

wobei  $c \in \mathbb{C}(y)$  eine geeignete Zahl ist. Eine elementare Rechnung zeigt, dass dieser Ring von den Elementen  $z^2 - c$ ,  $z(z^2 - c)$  und den Konstanten  $\mathbb{C}(y)$  erzeugt ist. Also gilt

$$\begin{aligned} \beta^{-1}(\pi^{-1}(y) \cap U) &= \operatorname{Spec} \mathbb{C}(y)[z^2 - c, z(z^2 - c)] \\ &= \operatorname{Spec} \mathbb{C}(y)[a, b]/(b^2 - a^2(a + c)). \end{aligned}$$

Beachte, dass diese Gleichung für  $c = 0$  eine Spitze definiert und für  $c \neq 0$  einen gewöhnlichen Doppelpunkt liefert.  $\square$

Die Strategie des Beweises ist es, eine Folge von Basiswechseln zu finden, die  $X$  und  $Y$  in einer Weise modifiziert, dass das Lemma 2.3.1 angewendet werden kann.

PROPOSITION 2.3.2. *Wenn  $\pi : X \rightarrow Y$  die Annahmen 2.2.2 erfüllt, dann gibt es ein Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

von endlichen surjektiven Morphismen, so dass die Familie  $\pi' : X' \rightarrow Y'$  die Annahmen 2.2.2 ebenfalls erfüllt.

BEWEIS. Die Normalisierung  $\tilde{X}$  ist ein  $\mathbb{P}_1$ -Bündel über  $Y$ . Wir erinnern daran, dass glatte Morphismen stabil unter Basiswechsel sind, so dass auch nach weiteren Überlagerungen der Basis der Rückzug von  $\tilde{X}$  immer noch ein  $\mathbb{P}_1$ -Bündel sein wird.

Wir bezeichnen den singulären Ort der  $\pi$ -Fasern mit  $X_{\operatorname{Sing}, \pi} \subset X$  und wählen eine irreduzible Komponente  $N \subset X_{\operatorname{Sing}, \pi}$ , die durch  $\pi$  surjektiv auf  $Y$  abgebildet wird. Weil  $Y$  eine glatte Kurve ist, ist  $N$  endlich über  $Y$ . Wenn  $\pi|_N$  ein Isomorphismus ist, fahren wir im Beweis fort. Ansonsten führen wir einen Basiswechsel durch. Danach können wir auf jeden Fall annehmen, dass  $N \cong Y$  ist.

Als nächsten Schritt betrachten wir die Normalisierung  $\eta : \tilde{X} \rightarrow X$  und das zugehörige relative Hilbert-Schema

$$\pi_H : \operatorname{Hilb}_2(\eta^{-1}(N)/Y) \rightarrow Y$$

von Null-dimensionalen Unterschema der Länge 2 in  $\eta^{-1}(N)$  über  $Y$ . Wir erinnern an die Tatsache [36, I.1.4.1.5], dass das Hilbert-Schema mit Basiswechsel kommutiert. In unserer Situation bedeutet das, dass wenn  $Y' \rightarrow Y$  ein Morphismus ist, dann ist

$$\operatorname{Hilb}_2(\eta^{-1}(N) \times_Y Y'/Y') \cong \operatorname{Hilb}_2(\eta^{-1}(N)/Y) \times_Y Y'.$$

Das hat für uns zwei wesentliche Konsequenzen.

Zum einen folgt aus der Wahl von  $N$ , dass wenn  $y \in Y$  ein allgemeiner Punkt ist, dass dann  $\eta^{-1}(N) \cap \tilde{\pi}^{-1}(y)$  ein Null-dimensionales Unterschema von der Länge mindestens zwei ist, so dass  $\pi_H^{-1}(y)$  nicht leer ist. Es folgt, dass  $\pi_H$  surjektiv ist.

Zum zweiten wählen wir eine Untervarietät  $V \subset (\operatorname{Hilb}_2(\eta^{-1}(N)/Y))_{\operatorname{red}}$ , die endlich über  $Y$  ist. Wir nennen die Normalisierung von  $V$  jetzt  $Y'$  und führen noch einen Basiswechsel durch. Weil das Hilbert-Schema mit Basiswechsel kommutiert, können wir  $Y'$  als Unterschema in  $\operatorname{Hilb}_2(\eta^{-1}(N) \times_Y Y'/Y')$  auffassen. Also definiert  $Y'$  ein Unterschema

$$\tilde{N} \subset \widetilde{X \times_Y Y'} = \tilde{X} \times_Y Y'.$$

Insgesamt sind jetzt alle Voraussetzungen von Lemma 2.3.1 erfüllt und wir können dieses Lemma anwenden, um  $X'$  zu erhalten. Weil unsere Konstruktion nur endliche Basiswechsel verwendet, ist es klar, dass  $X'$  die Annahmen 2.2.2 automatisch erfüllt.  $\square$

**BEMERKUNG 2.3.3.** Es sei  $X_y$  eine allgemeine  $\pi$ -Faser. Wenn  $X_y$  nicht immersiert ist, dann ergibt es sich aus der Konstruktion, dass wir  $\pi' : X' \rightarrow Y'$  so wählen können, dass alle  $\pi'$ -Fasern isomorph zu einer kuspidalen ebenen Kubik sind. Analog wird die Konstruktion, wenn alle  $\pi$ -Fasern immersiert sind, automatisch eine Familie von Kurven liefern, wobei jede Faser isomorph zu einer nodalen ebenen Kubik ist.

## 2.4. Beweis des Spaltungskriteriums

Wir werden jetzt ein relativ amples Geradenbündel auf  $X$  verwenden, um zwei disjunkte Schnitte  $\tilde{\sigma}_0$  und  $\tilde{\sigma}_1 \subset \tilde{X}$  zu konstruieren, die nicht kontrahiert werden können. Das gleich folgende, elementare Lemma sagt, dass dies nicht möglich ist. Der Beweis wird also im Wesentlichen auf einen Widerspruch zu der Annahme hinauslaufen, dass die Varietät  $X$  projektiv ist.

Die Frage, wann ein Bündel von singulären ebenen Kubiken projektiv ist, wird im Kapitel 4 noch einmal aufgegriffen und dort vollständig beantwortet werden. Es wäre demnach leicht möglich, den Beweis von Satz 2.2.1 zu führen, indem wir die Ergebnisse des Kapitels 4 vorwegnehmen. Weil der Autor aber glaubt, dass diese Beweisführung trotz der kompakteren Argumente und trotz der größeren theoretischen Eleganz nicht beim Verständnis der Sache hilft, werden wir in jedem der drei Fälle des Satzes 2.2.1 ein einfaches Ad-Hoc-Argument verwenden.

**LEMMA 2.4.1.** *Es sei  $\pi : \tilde{X} \rightarrow Y$  eine glatte minimale Regelfläche. Wir nehmen an, dass es drei verschiedene Schnitte  $\tilde{\sigma}_0$ ,  $\tilde{\sigma}_1$  und  $\tilde{\sigma}_\infty$  gibt, wobei  $\tilde{\sigma}_\infty^2 < 0$  sei. Dann sind  $\tilde{\sigma}_0$  und  $\tilde{\sigma}_1$  nicht disjunkt.*

**BEWEIS.** Wir schreiben  $\tilde{\sigma}_0 \equiv \tilde{\sigma}_\infty + a_0 C$  und  $\tilde{\sigma}_1 \equiv \tilde{\sigma}_\infty + a_1 C$ , wobei  $\equiv$  die numerische Äquivalenz bezeichnet und  $C$  eine allgemeine Faser von  $\pi$  ist. Weil  $\tilde{\sigma}_0$  und  $\tilde{\sigma}_1$  effektiv sind, ist  $\tilde{\sigma}_{0,1} \cdot \tilde{\sigma}_\infty \geq 0$  und es folgt, dass  $a_{0,1} \geq -\tilde{\sigma}_\infty^2 > 0$  ist. Also gilt  $\tilde{\sigma}_0 \cdot \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_\infty^2 + a_0 + a_1 > 0$ .  $\square$

Mit diesen Vorbereitungen können wir jetzt den Beweis von Satz 2.2.1 beenden. Wir behalten die Annahmen 2.2.2 bei und betrachten die Familie  $\pi : X \rightarrow Y$  von rationalen Kurven mit kuspidalen oder nodalen Singularitäten, deren Existenz durch Proposition 2.3.2 garantiert ist. Weiter sei  $\eta : \tilde{X} \rightarrow X$  die Normalisierung. Wir erinnern daran, dass die natürliche Projektionsabbildung  $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow Y$  nach Satz 1.5.1 dem Raum  $\tilde{X}$  die Struktur eines  $\mathbb{P}_1$ -Bündels gibt.

**2.4.1. Beweis im Fall (1) des Satzes 2.2.1.** In dieser Situation können wir nach der Proposition 2.3.2 und der Bemerkung 2.3.3 annehmen, dass alle  $\pi$ -Fasern nodale ebene Kubiken sind. Diese Situation ist in Abbildung 2.4.1 gezeigt. Nach Basiswechsel können wir weiter annehmen, dass das Urbild  $\eta^{-1}(X_{\text{Sing}})$  zwei disjunkte Schnitte  $\tilde{\sigma}_0$  und  $\tilde{\sigma}_1$  enthält.

Wenn  $\sigma_\infty \subset X_{\text{Sing}}$  ist, dann können sowohl  $\tilde{\sigma}_0$  als auch  $\tilde{\sigma}_1$  kontrahiert werden. Das ist aber offenbar unmöglich.

Wenn aber auf der anderen Seite,  $\sigma_\infty \not\subset X_{\text{Sing}}$  ist, dann enthält  $\tilde{X}$  den Schnitt  $\tilde{\sigma}_\infty \subset \eta^{-1}(\sigma_\infty)$ , der kontrahiert werden kann, und die Schnitte  $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1 \subset \eta^{-1}(X_{\text{Sing}})$ ,

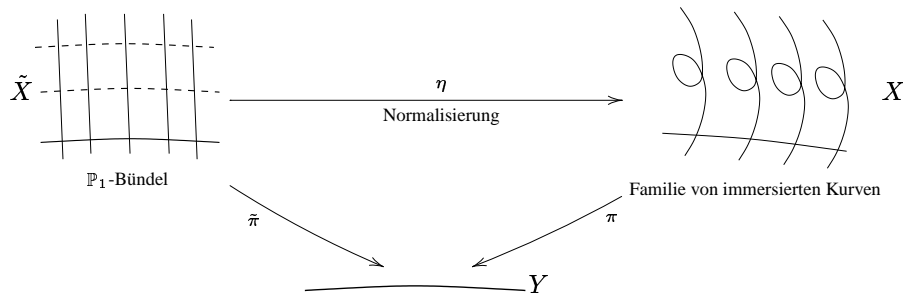


ABBILDUNG 2.4.1. Familie von immersierten Kurven

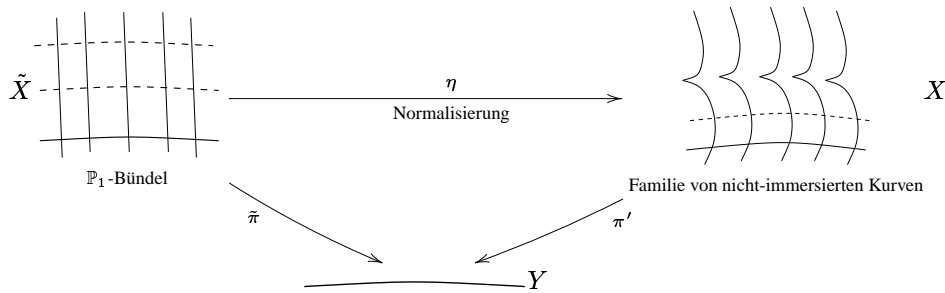


ABBILDUNG 2.4.2. Familie von nicht-immersierten Kurven

die disjunkt sind. Weil  $\tilde{\sigma}_0$ ,  $\tilde{\sigma}_1$  und  $\tilde{\sigma}_\infty$  aber paarweise verschieden sind, widerspricht dies dem Lemma 2.4.1.

**2.4.2. Beweis im Fall (2) des Satzes 2.2.1.** Es sei  $y \in Y$  ein beliebiger geometrischer Punkt. Wir setzen  $X_y := \pi^{-1}(y)$  und  $k := \deg L|_{X_y}$ . Nach der Bemerkung 2.3.3 können wir annehmen, dass  $X_y$  eine kuspidalemente ebene Kubik ist – diese Situation ist im Bild 2.4.2 gezeigt. Dann gibt es aber nach Lemma 2.1.4 einen eindeutigen glatten Punkt  $x_y \in X_y$ , so dass  $\mathcal{O}_{X_y}(k \cdot x_y) \cong L|_{X_y}$  ist. Eine Berechnung des versellen Deformationsraumes der kuspidalementen ebenen Kubik zeigt, dass  $\pi$  ein lokal triviales Faserbündel ist. Deshalb liefert die Vereinigung der  $(x_y)_{y \in Y}$  einen Schnitt  $\sigma_0 \subset X_{\text{Reg}}$ , der disjunkt zum singulären Ort von  $X$  ist. Wir setzen  $\tilde{\sigma}_0 := \eta^{-1}(\sigma_0)$  und  $\tilde{\sigma}_1 := \eta^{-1}(X_{\text{Sing}})$  und beachten, dass  $\tilde{\sigma}_0$  und  $\tilde{\sigma}_1$  disjunkt sein müssen. Es folgt aus der Annahme, dass  $\sigma_\infty \cap X_y$  ein glatter Punkt ist, der allgemein bezüglich des Geradenbündels  $L|_{X_y}$  ist, dass  $\tilde{\sigma}_0$ ,  $\tilde{\sigma}_1$  und  $\eta^{-1}(\sigma_\infty)$  unterschiedliche Schnitte sind. Dies aber widerspricht dem Lemma 2.4.1.

**2.4.3. Beweis im Fall (3) des Satzes 2.2.1.** Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass es Punkte  $y \in Y$  gibt, so dass  $\pi^{-1}(y)$  eine nodale Kurve ist. Falls das nicht der Fall ist, führen wir den Beweis leicht mit den Argumenten des Abschnittes 2.4.2.

Es sei  $y \in Y$  ein abgeschlossener Punkt. Weil  $X_y$  isomorph zu einer ebenen Kubik und  $L|_{X_y}$  ein Geradenbündel vom Grad 2 ist, ist das lineare System der Einschränkung  $L|_{X_y}$

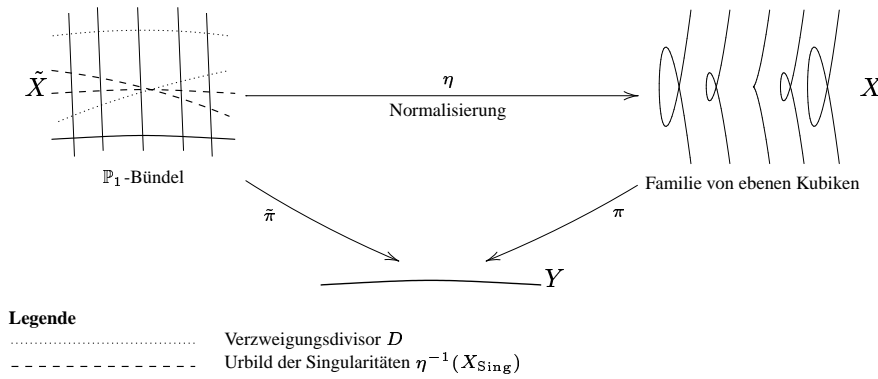


ABBILDUNG 2.4.3. Bündel von ebenen Kubiken mit Geradenbündel vom Grad 2

basispunktfrei und induziert eine verzweigte 2:1-Überlagerung

$$\Gamma_y : X_y \rightarrow \mathbb{P}(H^0(X_y, L|_{X_y})^*) \cong \mathbb{P}_1.$$

Wenn  $X_y$  eine nodale Kurve ist und wenn  $\eta_y : \mathbb{P}_1 \rightarrow X_y$  die Normalisierungsabbildung bezeichnet, dann besteht der Verzweigungsort von  $\Gamma_y \circ \eta$  aus zwei Punkten  $x_0$  und  $x_1$ , die nicht im Urbild der Singularität enthalten sind:  $x_i \notin \eta_y^{-1}((X_y)_{\text{Sing}})$ . Wir erweitern  $\Gamma_y$  auf natürliche Weise zu einer globalen Abbildung  $\Gamma$ :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow[\text{Normalisierung}]{\eta} & X & \xrightarrow{\Gamma} & \mathbb{P}(\pi_*(L)^*) \\ & \searrow \tilde{\pi} & \downarrow \pi & & \swarrow \\ & & Y & & \end{array}$$

Man beachte, dass  $\pi_*(L)$  lokal frei vom Rang 2 ist. Wir erinnern uns daran, dass  $\tilde{X}$  eine minimale glatte Regelfläche über  $Y$  ist und bezeichnen den Verzweigungsort von  $\Gamma \circ \eta$  mit  $D$ . Der Divisor  $D$  schneidet dann jede  $\tilde{\pi}$ -Faser in genau zwei Punkten.

Nach Durchführung eines weiteren Basiswechsels können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $D$  reduzibel ist. Wir schreiben  $D = \tilde{\sigma}_0 \cap \tilde{\sigma}_1$  und beachten, dass  $\tilde{\sigma}_0 \cap \tilde{\sigma}_1 = \emptyset$  ist, dass  $\tilde{\sigma}_0$  und  $\tilde{\sigma}_1$  also disjunkte Schnitte sind. Aber  $\tilde{X}$  enthält nach Annahme noch einen kontrahierbaren Schnitt  $\tilde{\sigma}_\infty$ . Nach Annahme (3) des Satzes 2.2.1 sind diese drei Schnitte verschieden und wir haben einen Widerspruch erreicht. Dies beendet den Beweis des Satzes 2.2.1. □

**2.4.4. Anmerkungen zum Beweis.** Wenn wir den Verzweigungsdivisor  $D$ , den wir im Abschnitt 2.4.3 konstruiert haben, auf eine generische, also nodale Faser  $X_y$  einschränken, erhalten wir die  $L$ -oskulierenden Punkte der Faser zurück. Diese Situation ist in größerer Allgemeinheit für beliebige relativ ample Bündel  $L$  in der Proposition 4.3.5 beschrieben. Man vergleiche die Abbildung 2.4.3 mit der Abbildung 4.3.1 auf Seite 42.

Die Ergebnisse der Abschnitte 2.4.1 und 2.4.2 finden sich in größerer Allgemeinheit ebenfalls in der Proposition 4.3.5 und in dem Theorem 4.2.1 auf Seite 38 wieder.

Die Ergebnisse dort zeigen auch, dass man mit den hier vorgestellten Methoden nicht auf ein Resultat hoffen kann, wenn man etwa ein Geradenbündel  $L$  vom relativen Grad 3 zulässt – wir erhielten dann einen 3-fach Schnitt über  $Y$ , und es wäre möglich, dass auch nach geeignetem Basiswechsel keine zwei Komponenten des Schnittes disjunkt wären. Die Ergebnisse des Kapitels 4 werden zeigen, wie sich explizite Beispiele konstruieren lassen.

## Anwendungen des Spaltungskriteriums

Um einige der Fragen aus der Einleitung zu beantworten, werden wir in diesem Kapitel das Spaltungskriterium 2.2.1 auf Familien von rationalen Kurven anwenden, die eine projektive Varietät überdecken. Dabei werden wir die folgenden Annahmen beibehalten.

ANNAHMEN 3.0.2. *Es sei  $X$  eine projektive, aber nicht notwendigerweise normale Varietät und es sei  $H \subset \text{RatCurves}^n(X)$  eine irreduzible, aber nicht notwendigerweise kompakte Familie von rationalen Kurven. Wir verwenden die Notation, die im Kapitel 1.3 auf Seite 7 eingeführt wurde*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\iota} & X \\ \pi \downarrow & & \\ & & H \end{array}$$

wobei  $U \subset \text{Univ}^c(X)$  die zugehörige Komponente der universellen Familie bezeichnet. Wir nehmen an, dass  $\iota$  dominant ist und dass  $H_x$  für eine allgemeine Wahl eines Punktes  $x \in X$  kompakt ist.

Wenn  $X$  eine Fano-Mannigfaltigkeit ist, dann gibt es immer eine Familie  $H$ , die den Annahmen 3.0.2 genügt. Nach Moris Existenzsatz 1.1.1 finden wir Komponenten  $H_i \subset \text{RatCurves}^n(X)$  so dass  $\iota : H_i \rightarrow X$  dominant ist. Um die gewünschte Kompaktheitseigenschaft zu erhalten, genügt es nach dem Kompaktheitssatz 1.3.6, eine Familie  $H_i$  auszuwählen, so dass der Grad der zugehörigen rationalen Kurven minimal ist.

### 3.1. Familien von singulären Kurven auf projektiven Varietäten

Der Zweck dieses Abschnittes ist es, eine obere Abschätzung für die Dimension des Raumes der singulären Kurven zu geben, die einen allgemeinen Punkt enthalten. Zusätzlich werden wir die Singularitäten dieser Kurven genauer beschreiben.

SATZ 3.1.1 (Spaltungskriterium für singuläre Kurven). *Es sei  $H^{\text{Sing}} \subset H$  die abgeschlossene Unterfamilie von  $H$ , die die singulären Kurven parametrisiert und es sei  $L \in \text{Pic}(X)$  ein Geradenbündel, dessen Einschränkung auf die Kurven positiven Grad hat. Wenn  $x \in X$  ein allgemeiner Punkt ist, dann gilt das folgende:*

- (1) *Die Unterfamilie  $H_x^{\text{Sing}}$  von singulären Kurven durch  $x$  hat höchstens Dimension 1.*
- (2) *Die Unterfamilie  $H_x^{\text{Sing},x} \subset H_x^{\text{Sing}}$  von Kurven, die bei  $x$  singulär sind, ist höchstens endlich.*
- (3) *Wenn  $H_x^{\text{Sing},x}$  nicht leer ist, dann sind die zugehörigen Kurven immersiert.*
- (4) *Wenn  $L$  die Kurven mit Multiplizität 2 schneidet, dann ist  $H_x^{\text{Sing}}$  höchstens endlich und  $H_x^{\text{Sing},x}$  ist leer.*

Es ist für die Anwendung wichtig, zu beachten, dass der Begriff eines “allgemeinen Punktes” von der Wahl der Komponente  $H$  und von der Wahl des Geradenbündels  $L$  abhängt.

Wir werden später im Abschnitt 3.5 sehen, dass dieses Resultat scharf ist.

BEWEIS. Als ersten Schritt müssen wir eine Abschätzung für die Dimension der Unterfamilie der nicht-immersierten Kurven finden. Wir bezeichnen den Raum der nicht-immersierten Kurven mit  $H^{\text{Sing},ni}$  und behaupten, dass

$$(3.1.1) \quad \dim H_x^{\text{Sing},ni} < 1$$

ist. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis. Wenn  $\dim H_x^{\text{Sing},ni} \geq 1$  wäre, dann können wir eine eigentliche Kurve  $C \subset X$  finden, die zu einem allgemeinen Punkt einer Komponente von  $H_x^{\text{Sing},ni}$  gehört, welche von maximaler Dimension ist. Nach Lemma 2.1.6 finden wir einen glatten Punkt  $y \in C$  der in Bezug auf  $L|_C$  allgemein ist. Wir bemerken, dass  $C$  kein isolierter Punkt von  $H_y^{\text{Sing},ni}$  ist und schließen aus dem Spaltungskriterium 2.2.1, dass  $H_y^{\text{Sing},ni}$  nicht kompakt sein kann. Dann kann  $H_y$  aber entgegen unserer Annahme auch nicht kompakt gewesen sein. Dies beweist die Ungleichheit (3.1.1).

Als nächsten Schritt zeigen wir, dass

$$(3.1.2) \quad \dim H_x^{\text{Sing}} \leq 1$$

ist. Wir werden wieder einen Widerspruchsbeweis führen und nehmen an, dass  $\dim H_x^{\text{Sing}} \geq 2$  ist. Wenn  $H' \subset H_x^{\text{Sing}}$  jetzt eine Kurve ist, die nodale Kurven parametrisiert, dann können wir Satz 2.2.1 auf die Familie  $H'$  anwenden, um zu sehen, dass  $H'$  nicht kompakt gewesen sein kann. Es folgt, dass der Abschluss  $\overline{H'}$  die Unterfamilie  $H_x^{\text{Sing},ni}$  schneidet und dass deshalb

$$\text{codim}_{H_x^{\text{Sing}}} H_x^{\text{Sing},ni} \leq 1$$

gilt. Die Behauptung (1) folgt deshalb aus der Ungleichheit (3.1.1).

Um nun zu zeigen, dass  $H_x^{\text{Sing},x}$  höchstens endlich ist, führen wir eine Dimensionszählung durch. Es ist klar, dass

$$\dim U^{\text{Sing}} = \dim H^{\text{Sing}} + 1 \geq \dim H_x^{\text{Sing},x} + \dim X + 1$$

ist. Das wiederum zeigt, dass die generische Faser  $F$  der natürlichen Abbildung  $U^{\text{Sing}} \rightarrow X$  von der Dimension

$$\dim F \geq \dim H_x^{\text{Sing},x} + 1$$

ist. Wenn wir jetzt noch bemerken, dass die natürliche Abbildung  $F \rightarrow H_x^{\text{Sing},x}$  endlich ist, dass also  $\dim F = \dim H_x^{\text{Sing}}$  gilt, dann erhalten wir zusammen mit der Ungleichung (3.1.2), dass

$$1 \geq \dim H_x^{\text{Sing}} \geq \dim H_x^{\text{Sing},x} + 1$$

ist. Damit ist die Behauptung (2) bewiesen.

Dieselbe Dimensionszählung, angewandt auf die Familie  $H_x^{\text{Sing},ni}$  liefert zusammen mit der Ungleichung (3.1.1) die Aussage (3).

Um schließlich die Aussage (4) zu beweisen, argumentieren wir wie oben. Wir nehmen an, dass es eine singuläre Kurve  $C \subset X$  gibt, die zu einem allgemeinen Punkt von  $H^{\text{Sing}}$  gehört und wählen einen Punkt  $y \in C$ , der allgemein bezüglich  $L|_C$  ist. Nach Satz 2.2.1 kann die Familie  $H_y^{\text{Sing}}$  nicht kompakt sein, und wir haben einen Widerspruch erreicht.  $\square$



Die Methoden, die wir zum Beweis der Proposition 1.3.3 verwendet haben, liefern noch das folgende Korollar, das wir aber hier nicht benutzen und nur der Vollständigkeit halber erwähnen. Wir erinnern an Hartshornes Zusammenhangssatz (siehe zum Beispiel [13, thm. 18.12], oder die ausführlichere Darstellung in [17, chap. 3.1]), der in unserer Situation zeigt, dass  $H_x$  bei  $H_x^{\text{Sing},x}$  nicht Cohen-Macaulay ist, wenn  $\dim H_x > 1$  ist.

**KOROLLAR 3.1.2.** *Die Normalisierungsabbildung  $\tilde{H}_x \rightarrow H_x$  ist außerhalb von  $H_x^{\text{Sing},x}$  bijektiv. Wenn  $\ell \in H_x^{\text{Sing},x}$  gegeben ist, dann enthält das Urbild in  $\tilde{H}_x$  mehrere Punkte.*  $\square$

### 3.2. Existenz einer endlichen Tangentialabbildung

Wenn die Dimension  $\dim H_x$  größer als eins ist, dann sagt Satz 3.1.1, dass eine generische Kurve, die zu einem Punkt in  $H_x$  gehört, glatt ist. Wenn  $\tilde{H}_x$  die Normalisierung von  $H_x$  bezeichnet, dann können wir also eine ‘‘Tangentialabbildung’’

$$\tau_x : \tilde{H}_x \dashrightarrow \mathbb{P}(T_X^*|_x)$$

definieren, die einer Kurve durch  $x$  ihre Tangentialrichtung bei  $x$  zuordnet<sup>1</sup>. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass  $\tau$  immer ein endlicher Morphismus ist. Dies beantwortet die Frage (4) zumindest teilweise. Analog zu der Bemerkung, die wir auf Seite 11 vor Morris Bend-and-Break gebracht haben, stellen wir fest, dass das folgende Resultat zwar nicht zeigt, dass eine minimale rationale Kurve durch einen Punkt  $x$  und eine Tangentialrichtung  $\vec{v} \in T_X|_x$  eindeutig bestimmt ist, aber immerhin zeigt, dass es zu hinreichend allgemeinen Daten  $(x, \vec{v})$  nur endlich viele Kurven geben kann.

Falls  $X$  eine Kontaktmannigfaltigkeit ist, werden wir im Abschnitt 6.5 sehen, dass die Abbildung  $\tau_x$  eine generisch injektive Immersion ist.

Das Bild der Tangentialabbildung wurde von J.-M. Hwang und N. Mok in einer Reihe von Arbeiten in verschiedenen Situationen (zum Beispiel in [25] und [26]) untersucht. J.-M. Hwang hat dem Autor mitgeteilt, dass der folgende Satz 3.2.1 zum Beispiel verwendet werden kann, um einen neuen, einfacheren, Beweis der Deformationsstarrheit von hermiteschen symmetrischen Räumen [24] zu geben.

Im Allgemeinen ist es offen, ob  $\tau_x$  immersiv ist und ob das Bild  $\tau_x(\tilde{H}_x)$  irreduzibel oder linear normal ist. Eine gut lesbare Einführung in diesen Problemkreis findet sich in dem Übersichtsartikel [22].

**SATZ 3.2.1** (Existenz einer endlichen Tangentialabbildung). *Es seien  $X$  und  $H$  wie in den Annahmen 3.0.2. Wenn  $x \in X$  ein allgemeiner Punkt ist, dann ist  $\tau_x$  ein endlicher Morphismus.*

**BEWEIS.** Nach Proposition 1.3.3 können wir  $\tilde{H}_x$  mit gewissen Komponenten von  $\text{RatCurves}^n(x, X) = \text{Hom}_{\text{bir}}^n(\mathbb{P}_1, X, [0 : 1] \mapsto x)/\mathbb{B}$  identifizieren und erhalten so folgende Darstellung von  $\tau_x$

$$(3.2.1) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{H}_x & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_{\text{bir}}(\mathbb{P}_1, X, 0 \mapsto x)/\mathbb{B} \\ & \searrow \tau_x & \downarrow \beta \\ & & \mathbb{P}(T_X^*|_x) \end{array}$$

<sup>1</sup> Wir verwenden in dieser Arbeit die Grothendiecksche Notation:  $\mathbb{P}(V^*) = (V \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ .

wobei  $\beta$  einen Morphismus  $f$  auf das Bild seiner Tangentialabbildung abbildet

$$\beta : f \mapsto Tf(T_{\mathbb{P}_1}|_{[0:1]}).$$

Weil die Morphismen  $f$  aber birational sind und das Bild von  $f$  nach Satz 3.1.1 bei  $x$  immersiert ist, ist die Tangentialabbildung  $Tf$  nie Null, und  $\beta$  ist daher an allen Punkten von  $\tilde{H}_x$  wohldefiniert.

Um zu zeigen, dass  $\tau_x$  endlich ist, verwenden wir einen Widerspruchsbeweis. Wenn  $\tau_x$  nicht endlich wäre, dann könnten wir eine kompakte Kurve  $H' \subset H_x$  finden, so dass  $\tau_x(H')$  ein einzelner Punkt  $v \in \mathbb{P}(T_X^*|_x)$  ist. Nach Basiswechsel nehmen wir an, dass  $H'$  glatt ist und betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{\iota'} & X \\ \pi' \downarrow & & \\ H' & & \end{array}$$

wobei  $U'$  die Normalisierung des Rückzugs der universellen Familie und deshalb nach Satz 1.5.1 ein  $\mathbb{P}_1$ -Bündel über  $H'$  ist. Es gibt einen Schnitt  $\sigma_\infty \subset U'$ , der auf den Punkt  $x$  kontrahiert wird. Die Einschränkung des Tangentialbündels auf  $\sigma_\infty$  liefert einen Morphismus

$$T\iota' : N_{\sigma_\infty, U'} \rightarrow v \cong \mathbb{C}$$

wobei  $N_{\sigma_\infty, U'}$  das Normalenbündel von  $\sigma_\infty$  in  $U'$  ist, und  $v$  eine Gerade in  $T_X|_x$ . Weil das Normalenbündel nicht trivial ist, muss diese Abbildung aber eine Nullstelle haben. Also existiert eine Kurve in  $H'$ , die bei  $x$  eine nicht-immersierte Singularität hat. Das widerspricht aber dem Satz 3.1.1 und wir sind fertig.  $\square$

### 3.3. Eindeutigkeit von minimalen Kurven durch zwei Punkte

In diesem Abschnitt werden wir eine Teilantwort auf die in der Einleitung formulierte Frage geben, inwieweit zwei hinreichend allgemeine Punkte eine minimale rationale Kurve eindeutig festlegen. Wir zeigen, dass die Eindeutigkeit für eine überdeckende Familie von rationalen Kurven von sehr kleinem Grad gilt.

Der wesentliche Punkt im Beweis ist das folgende Kriterium von Y. Miyaoka, das die Birationalität von  $\iota_x$  mit der Existenz von singulären Kurven verbindet<sup>2</sup>. Dieses Kriterium war die ursprüngliche Motivation des Autors für das Studium der Familien von singulären rationalen Kurven.

**SATZ 3.3.1** (Miyaokas Existenzsatz für singuläre Kurven, [36, V.3.7.5]). *Wenn  $\iota_x : U_x \rightarrow \text{locus}(H_x)$  nicht birational ist, dann ist  $H_x^{\text{Sing}, x}$  nicht leer.*

Die Idee beim Beweis dieses Kriteriums ist in der Abbildung 3.3.1 gezeigt. Wir wählen eine generische Kurve  $C \in H_x$  und einen Punkt  $y \in C \setminus \{x\}$ . Nach Annahme gibt es eine weitere Kurve  $C_y \in H_x$ , die sowohl  $x$  als auch  $y$  enthält. Wir betrachten jetzt die Deformation von  $C_y$ , die entsteht, wenn wir den Punkt  $y$  bewegen. Als Grenzfall werden wir eine nodale Kurve erhalten.

**BEWEIS.** Es sei  $C \in H_x$  eine generische Kurve. Wenn  $\iota_x$  nicht birational ist, dann wird es in  $\iota_x^{-1}\iota_x(C) \subset U_x$  eine Kurve  $B$  geben, so dass  $\iota_x(B) \neq \{x\}$  ist und so, dass  $B$  keine Faser der Abbildung  $\pi_x : U_x \rightarrow H_x$  ist. Wir führen gegebenenfalls einen Basiswechsel

<sup>2</sup> Wir verwenden hier die Notation 1.3.2, die auf Seite 7 eingeführt wurde.

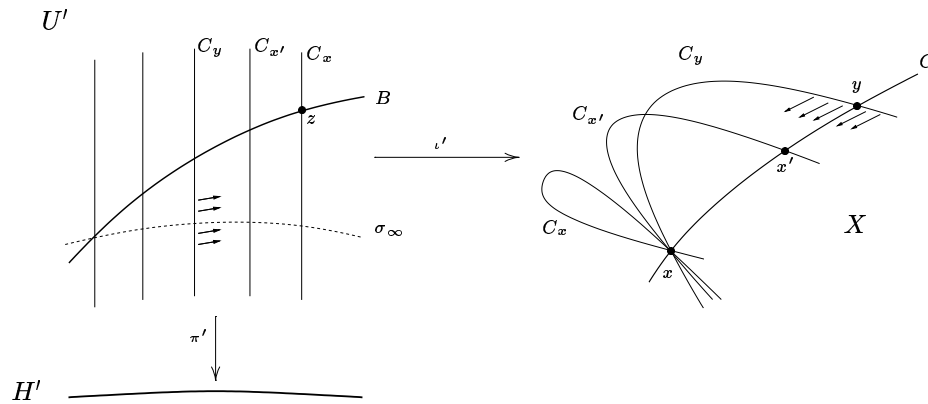


ABBILDUNG 3.3.1. Existenz von singulären Kurven

durch und können dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $H' := \pi(B)$  eine glatte Kurve ist. Wir erhalten also eine Regelfläche  $U'$  über  $H'$  mit einer Abbildung  $\iota' : U' \rightarrow X$  die einen Schnitt  $\sigma_\infty \subset U'$  auf  $x$  kontrahiert. Wir beachten, dass die Abbildung  $\iota'$  nach Satz 3.1.1 entlang des Schnittes  $\sigma_\infty$  konstanten Rang 1 haben muss, weil alle Faser von  $\pi'$  zu Kurven korrespondieren, die bei  $x$  immersiert sind<sup>3</sup>. Mit anderen Worten können wir sagen, dass der Schnitt  $\sigma_\infty$  mit seiner reduzierten Struktur eine Komponente des schementheoretischen Urbildes  $(\iota')^{-1}(x)$  ist.

Wir schreiben  $B \equiv \sigma_\infty + nF$ , wobei  $F$  eine Faser der Abbildung  $\pi'$  ist und “ $\equiv$ ” die numerische Äquivalenz bezeichnet. Wenn  $H \in \text{Pic}(X)$  ein amples Geradenbündel ist, und  $r$  die Überlagerungsordnung der (endlichen) Abbildung  $\iota'|_B$  ist, dann ist

$$B \cdot (\iota')^*(H) = r \cdot F \cdot (\iota')^*(H).$$

Diese Zahl können wir auch anders ausdrücken:

$$B \cdot (\iota')^*(H) = \underbrace{\sigma_\infty \cdot (\iota')^*(H)}_{=0} + n \cdot F \cdot (\iota')^*(H).$$

Es folgt, dass  $r = n$  ist. Also muss  $(\iota'|_B)^{-1}(x)$  ein Null-dimensionales Unterschema von Länge  $n$  sein. Weil  $\sigma_\infty$  eine reduzierte Komponente im schementheoretischen Urbild von  $(\iota')^{-1}(x)$  ist, können wir die Länge des schementheoretischen Schnittes  $(\iota'|_B)^{-1}(x) \cap \sigma_\infty$  nach [18, V.1.4] als Schnittzahl ausdrücken:

$$\text{length} \left( (\iota'|_B)^{-1}(x) \cap \sigma_\infty \right) = B \cdot \sigma_\infty = \underbrace{\sigma_\infty^2}_{<0} + n < n.$$

Also muss es einen Punkt  $z \in B \setminus \sigma_\infty$  geben, so dass  $\iota_x(z) = x$  ist. Die zu  $\pi'(z) \in H_x$  gehörende Kurve  $C_x$  wird dann eine immersierte Singularität bei  $x$  haben.  $\square$

Die angekündigte Birationalitätsaussage folgt jetzt als einfaches Korollar.

<sup>3</sup> Man kann auch ohne Satz 3.1.1 argumentieren und feststellen, dass  $H_x^{\text{Sing},x}$  nicht-immersierte Kurven enthält wenn der Rang von  $\iota'|_{\sigma_\infty}$  an einem Punkt Null wird.

**SATZ 3.3.2 (Kriterium für die Birationalität von  $\iota_x$ ).** *Wenn unter den Annahmen 3.0.2 noch ein Geradenbündel  $L \in \text{Pic}(X)$  existiert, welches die Kurven aus  $H$  mit Multiplizität 2 schneidet, dann ist  $\iota_x$  birational. Wenn  $y \in \text{locus}(H_x)$  also ein allgemeiner Punkt ist, dann gibt es genau eine Kurve in  $H$ , die sowohl  $x$  als auch  $y$  enthält.*

**BEWEIS.** Dies folgt unmittelbar aus Miyaoka's Existenzsatz 3.3.1 für singuläre Kurven und aus dem Spaltungskriterium 3.1.1.  $\square$

Der Satz 3.3.2 wurde in der Arbeit [31] auch in positiver Charakteristik bewiesen. Dann folgt allerdings nur, dass  $\iota_x$  generisch Eins-zu-Eins ist, und das Beispiel 1.5.2 zeigt, dass Birationalität im Allgemeinen auch nicht erwartet werden kann. Dies ist der Hauptgrund, warum der Beweis für die nachfolgende Charakterisierung des projektiven Raumes in positiver Charakteristik nicht funktioniert.

### 3.4. Charakterisierung von $\mathbb{P}_n$

In der Arbeit [35] haben S. Kobayashi und T. Ochiai den projektiven Raum als die einzige Fano-Mannigfaltigkeit charakterisiert, deren kanonisches Bündel durch  $\dim X + 1$  teilbar ist. Dieses Ergebnis wurde später in ([15], siehe auch [5, chap. 3.1]) für normale Gorenstein-Varietäten verallgemeinert. Weil die Teilbarkeit des kanonischen Bündels beim Studium von Varietäten, die von rationalen Kurven überdeckt werden, im Allgemeinen nicht sichergestellt werden kann, ist es wünschenswert, eine Charakterisierung des projektiven Raumes zu beweisen, die normale Varietäten zulässt und nur die Existenz einer hinreichend großen Familie von minimalen rationalen Kurven annimmt, die kleinen Grad bezüglich eines ample Geradenbündels haben. Ein erstes Resultat in dieser Richtung ist implizit in [42, lem. 1.1] enthalten. In der Arbeit [29] beweisen Y. Kachi und E. Sato ein ähnliches Resultat für nicht-kompakte Familien von Kurven vom Grad 2; allerdings wird hier vorausgesetzt, dass es für je zwei allgemeine Punkte  $y, z$  eine Kurve  $\ell \in H_x$  gibt, die  $x, y$  und  $z$  enthält<sup>4</sup>, und es wird angenommen, dass die Varietät  $\mathbb{Q}$ -faktoriell ist.

Wir wenden Satz 3.1.1 an, um eine Charakterisierung des projektiven Raumes anzugeben, die diese Resultate wesentlich verbessert; insbesondere wird die schwer zu überprüfende Annahme der  $\mathbb{Q}$ -Faktorialität nicht benötigt.

In dem Preprint [28] von K. Cho, Y. Miyaoka und N. Shepherd-Barron ist eine andere Charakterisierung von  $\mathbb{P}_n$  angekündigt, die die Schnittzahlbedingung nicht benötigt, wenn  $X$  glatt ist, oder wenn die Gesamtfamilie  $H$  kompakt ist. Auch der Fall, wo  $H$  nicht kompakt ist, wird beschrieben. Der Beweis baut auf den Ergebnissen dieser Arbeit auf.

**SATZ 3.4.1 (Charakterisierung von  $\mathbb{P}_n$ ).** *Es sei  $X$  eine normale projektive Varietät, die über dem Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen definiert ist. Es gebe ein Geradenbündel  $L \in \text{Pic}(X)$  und eine irreduzible Komponente  $H \subset \text{RatCurves}^n(X)$  mit folgenden Eigenschaften:*

- (1) *Wenn  $x \in X$  ein allgemeiner Punkt ist, dann ist  $H_x$  kompakt und  $\text{locus}(H_x) = X$ .*
- (2) *Wenn  $\ell \in H$  eine Kurve ist, dann gilt  $L \cdot \ell \in \{1, 2\}$ .*

Dann ist  $X \cong \mathbb{P}_n$ .

---

<sup>4</sup>Vergleiche Moris Bend-and-Break, Korollar 1.4.2.

Satz 3.4.1 folgt aus dem Kriterium 3.3.2 für die Birationalität von  $\iota_x$  und aus einer Argumentation, die von S. Mori zum Beweis der Hartshorne-Frankel-Vermutung entwickelt wurde. Wir folgen der Darstellung in [36, V.3] und zitieren ein elementares Lemma.

LEMMA 3.4.2 ([36, V.3.7.8]). *Es sei  $U$  ein  $\mathbb{P}_1$ -Bündel über  $\mathbb{P}_m$  und es sei  $\sigma_\infty \subset U$  ein Schnitt. Wenn es einen birationalen Morphismus  $\iota : U \rightarrow X$  gibt, der  $\sigma_\infty$  auf einen glatten Punkt  $x$  abbildet und wenn die Einschränkung*

$$\iota|_{U \setminus \sigma_\infty} : U \setminus \sigma_\infty \rightarrow X \setminus \{x\}$$

isomorph ist, dann ist  $X \cong \mathbb{P}_n$ . □

BEWEIS VON SATZ 3.4.1. Es sei  $\tilde{H}_x$  die Normalisierung einer Komponente des Raumes  $H_x$  und  $\tilde{U}_x$  die Normalisierung der entsprechenden Komponente der universellen Familie  $U_x$ . Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{\iota}_x \\ & \searrow & \nearrow \\ \tilde{U}_x & \xrightarrow{\exists \hat{\iota}_x} & B(X, x) \xrightarrow{\text{Aufblasung von } X} X \\ \tilde{\pi}_x \downarrow \text{\scriptsize } \mathbb{P}_1\text{-Bündel} & & \\ \tilde{H}_x & \xrightarrow{\tau_x} & \mathbb{P}(T_X^*|_x) \end{array}$$

Es folgt direkt aus dem Birationalitätskriterium 3.3.2, dass  $\tilde{\iota}_x$  birational ist.

Wir behaupten, dass der Morphismus  $\tilde{\iota}_x$  über die Aufblasung  $B(X, x)$  von  $X$  in  $x$  faktorisiert. Dazu beachten wir, dass die Einschränkung von  $\tilde{\iota}_x$  auf eine beliebige Faser von  $\tilde{\pi}_x$  nach Satz 3.1.1 eine Einbettung ist, weil die Bildkurve glatt ist. Das schementheoretische Urbild  $\sigma_\infty = \tilde{\iota}_x^{-1}(x)$  ist deshalb ein reduzierter Cartier-Divisor und die Existenz der Faktorisierung via  $\hat{\iota}_x$  folgt aus der universellen Eigenschaft der Aufblasung [18, II.7.14].

Um jetzt zu zeigen, dass  $\tau_x$  ein Isomorphismus und  $\tilde{H}_x \cong \mathbb{P}(T_X^*|_x)$  ist, werden wir  $\tau_x$  durch  $\hat{\iota}_x$  ausdrücken. Dazu beachten wir, dass  $\sigma_\infty$  ein Schnitt und dass  $\tilde{\pi}_x|_{\sigma_\infty} : \sigma_\infty \rightarrow \tilde{H}_x$  ein Isomorphismus ist. Wir identifizieren den exzeptionellen Divisor  $E \subset B(X, x)$  mit  $\mathbb{P}(T_X^*|_x)$  und können also schreiben  $\tau_x = \hat{\iota}_x \circ (\tilde{\pi}_x|_{\sigma_\infty})^{-1}$ . Da nach Zariskis Hauptsatz alle Fasern der birationale Abbildung  $\hat{\iota}_x$  zusammenhängend sind, und die Abbildung  $\tau_x = \hat{\iota}_x \circ (\tilde{\pi}_x|_{\sigma_\infty})^{-1}$  aber endlich ist, ist  $\tau_x$  selbst birational. Dann ist  $\tau_x$  aber eine birationale endliche Abbildung zwischen normalen Räumen und deshalb – wieder nach Zariskis Hauptsatz – isomorph. Also ist  $\tilde{H}_x \cong \mathbb{P}_n$ .

Als nächstes werden wir zeigen, dass die Einschränkung

$$\hat{\iota}_x|_{\tilde{U}_x \setminus \sigma_\infty} : \tilde{U}_x \setminus \sigma_\infty \rightarrow X \setminus \{x\}$$

isomorph ist. Dazu müssen wir lediglich zeigen, dass es keine Kurve  $C \subset \tilde{U}_x \setminus \sigma_\infty$  gibt, die von  $\tilde{\iota}_x$  auf einen Punkt  $y \in X$  kontrahiert wird. Wenn es eine solche Kurve gäbe, dann wäre  $C$  kompakt und disjunkt zu  $\sigma_\infty$ . Wir erhielten also eine positiv-dimensionale Familie von rationalen Kurven in  $X$ , die sowohl  $x$  als auch  $y$  enthielten. Dies widerspräche aber Moris Bend-and-Break, Korollar 1.4.2.

In dieser Situation liefert das Lemma 3.4.2 die Behauptung. □

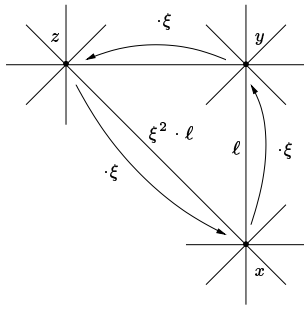


ABBILDUNG 3.5.1. Geraden im  $\mathbb{P}_2$  mit  $\mathbb{Z}_3$ -Wirkung

### 3.5. Optimalität der Resultate

Wir werden jetzt ein Beispiel angeben, das zeigt, dass die Ergebnisse dieses Kapitels scharf sind. Das Beispiel ist dem Preprint [28] entnommen.

BEISPIEL 3.5.1. Wir lassen die Gruppe  $\mathbb{Z}_3$  der dritten Einheitswurzeln durch

$$(3.5.1) \quad \xi : [u : v : w] \mapsto [u : \xi \cdot v : \xi^2 \cdot w]$$

auf  $\mathbb{P}_2$  wirken und betrachten den Quotienten  $\gamma : \mathbb{P}_2 \rightarrow X = \mathbb{P}_2 / \mathbb{Z}_3$ .

Eine direkte Rechnung zeigt, dass es in Bezug auf die Abbildung  $\gamma$  drei Sorten von Geraden in  $\mathbb{P}_2$  gibt.

**Koordinatenachsen:** Die Einschränkung der Abbildung  $\gamma$  auf eine der Koordinatenachsen  $\ell_u = \{u = 0\}$ ,  $\ell_v = \{v = 0\}$  und  $\ell_w = \{w = 0\}$  ist eine 3:1 verzweigte Überlagerung.

**Geraden durch Fixpunkt:** Eine Gerade  $\ell \subset \mathbb{P}_2$  durch einen der drei  $\mathbb{Z}_3$ -Fixpunkte, die keine Koordinatenachse ist, wird von  $\gamma$  birational auf eine Kurve mit kuspider Singularität abgebildet.

**andere Geraden:** Alle Geraden, die keinen der drei Fixpunkte enthalten, werden von  $\gamma$  birational auf eine Kurve mit nodaler Singularität abgebildet. Um dies einzusehen, betrachten wir eine Gerade  $\ell$  wie in Abbildung 3.5.1. Wenn  $\ell$  keinen Fixpunkt enthält, schneiden sich die Geraden  $\ell$  und  $\xi \cdot \ell$  in genau einem Punkt  $y = \ell \cap \xi \cdot \ell$ . Wenn wir  $x := \xi^{-1} \cdot y$  schreiben, ist es klar, dass  $\gamma(x) = \gamma(y)$  ist, und dass  $x$  und  $y$  die einzigen Punkte auf  $\ell$  sind, die durch  $\gamma$  identifiziert werden.

Weil die Einschränkung von  $\gamma$  auf eine Gerade  $\ell$  stets birational ist, wenn  $\ell$  keine der Koordinatenachsen ist, erhalten wir eine Familie  $H \subset \text{RatCurves}^n(X)$  von singulären Kurven, die als Bild von Geraden in  $\mathbb{P}_2$  auftreten, die keine Koordinatenachsen sind.

**Dimensionsabschätzung.** Die Familie  $H$  zeigt, dass die Dimensionsgrenze des Satzes 3.1.1 schon für normale Varietäten tatsächlich angenommen wird. Weil der Divisor  $3 \cdot \ell_u \in \text{Div}(\mathbb{P}_2)$  der Rückzug eines Cartier-Divisors ist, zeigt das Beispiel auch, dass die Schnittzahlbedingung des Satzes 3.1.1.(2) nicht abgeschwächt werden kann.

**Singularität von  $H_x$ .** Wir identifizieren den Raum der Geraden in  $\mathbb{P}_2$  mit dem dualen  $\mathbb{P}_2^*$  und beachten, dass die induzierte  $\mathbb{Z}_3$ -Wirkung auf  $\mathbb{P}_2^*$  wieder wie in (3.5.1) geschrieben

werden kann. Die Familie  $H$  kann dann als  $\mathbb{Z}_3$ -Quotient  $H \cong (\mathbb{P}_2^* \setminus \{\ell_u, \ell_v, \ell_w\})/\mathbb{Z}_3$  geschrieben werden. Wenn ein allgemeiner Punkt  $x \in \mathbb{P}_2$  gegeben ist, dann ist die Menge der Geraden, die  $x$  enthält, eine allgemeine Gerade im dualen Raum  $\mathbb{P}_2^*$ . Das Bild dieser Gerade im Quotientenraum  $H$  wird dann eine nodale Kurve sein. Die Unterfamilie  $H_{\gamma(x)}$  ist also, wie in Korollar 3.1.2 vorhergesagt, selbst nicht normal.

In der Abbildung 3.5.1 sind es die Kurven  $\ell$  und  $\xi^2 \cdot \ell \in H_x$ , die von  $\gamma$  identifiziert werden.

**Kurven durch zwei Punkte.** Wenn  $x$  und  $y \in \mathbb{P}_2$  hinreichend allgemeine Punkte sind, dann gibt es eine Gerade  $\ell_{x,y} \subset \mathbb{P}_2$ , die  $x$  und  $y$  enthält, und eine weitere Gerade  $\ell_{x,\xi \cdot y}$ , die  $x$  und  $\xi \cdot y$  enthält. Diese Geraden werden nicht gleich sein, und auch die Bilder  $\gamma(\ell_{x,y})$  und  $\gamma(\ell_{x,\xi \cdot y})$  sind nicht gleich. Es gibt in  $H$  daher mindestens zwei Geraden, die sowohl  $\gamma(x)$  als auch  $\gamma(y) = \gamma(\xi \cdot y)$  enthalten. Das zeigt, dass die Schnitzzahlbedingung aus Satz 3.3.2 nicht abgeschwächt werden kann.

**Charakterisierung des projektiven Raumes.** Die Beispielfamilie  $H$  erfüllt alle Voraussetzungen des Satzes 3.4.1 bis auf die Existenz eines Geradenbündels, das die Kurven mit Multiplizität zwei oder eins schneidet. Deshalb kann auch diese Bedingung nicht abgeschwächt werden.





## Familien von singulären ebenen Kubiken

Um die singulären rationalen Kurven zu studieren, die eine algebraische Varietät überdecken haben wir im Kapitel 2 ein Spaltungskriterium für Familien von singulären Kurven entwickelt. Dazu haben wir im Abschnitt 2.3 eine partielle Auflösung der Singularitäten konstruiert, die die Familie von – möglicherweise sehr singulären – rationalen Kurven in eine besser handhabbare Familie von singulären ebenen Kubiken verwandelt. Das Hauptargument beim Beweis des Spaltungskriterium lief dann darauf hinaus zu zeigen, dass der Totalraum dieses Bündels in bestimmten Situationen nicht projektiv sein kann. Aus diesem Grund ist die Frage nach einer endgültigen Charakterisierung der projektiven Bündel und das Studium der Moduli solcher Bündel von Interesse. Die Lösung des Charakterisierungsproblems ist das Thema dieses Kapitels.

Wir betrachten also (singuläre) Varietäten  $X$ , die einen Morphismus  $\pi : X \rightarrow C$  auf eine glatte algebraische Kurve besitzen, so dass alle Fasern isomorph zu integralen und singulären ebenen Kubiken sind. Obwohl  $C$  in dieser Situation immer mit offenen Mengen  $U_\alpha$  überdeckt werden kann, so dass  $X_\alpha := \pi^{-1}(U_\alpha)$  mit einer Familie von kubischen Kurven in  $\mathbb{P}_2 \times U_\alpha$  identifiziert ist, kann  $X$  im Allgemeinen nicht in ein  $\mathbb{P}_2$ -Bündel über  $C$  eingebettet werden und ist im Allgemeinen auch nicht projektiv.

Es wird sich zeigen, dass die Menge  $P$  der projektiven Bündel weder offen noch abgeschlossen in der Menge aller Bündel von ebenen Kubiken ist und dass die irreduziblen Komponenten von  $P$  Untervarietäten von hoher Kodimension sind. Eine präzise Aussage findet sich in der Bemerkung 4.2.5 weiter unten.

### 4.1. Regelflächen und elementare Transformationen

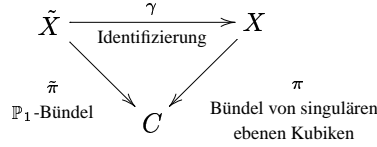
Bevor wir im Abschnitt 4.2 die Ergebnisse dieses Kapitels zusammenfassen, ist es sinnvoll einige elementare Fakten über den Normalisierungsmorphismus und über elementare Transformationen zwischen minimalen Regelflächen zusammenzustellen.

**4.1.1. Regelflächen.** Als ersten Schritt in der Reduktion des Charakterisierungsproblems beobachten wir, dass die folgenden Daten äquivalent sind.

- (1) Ein Bündel  $X$  von singulären ebenen Kubiken über einer glatten Kurve  $C$ .
- (2) Eine Regelfläche  $\tilde{X}$  über  $C$  und ein Doppelschnitt  $\tilde{\sigma} \subset X$ .

Der Zusammenhang zwischen diesen Daten beschreibt sich wie folgt: Wenn ein Bündel  $X$  von singulären ebenen Kubiken gegeben ist, wissen wir nach Satz 1.5.1, dass die Normalisierung  $\tilde{X}$  ein  $\mathbb{P}_1$ -Bündel über  $C$  sein wird. Das schementheoretische Urbild des (reduzierten) Ortes der Singularitäten wird dann ein Doppelschnitt sein. Auf der anderen Seiten können wir, wenn  $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow C$  ein  $\mathbb{P}_1$ -Bündel mit Doppelschnitt  $\tilde{\sigma}$  ist, das folgende Diagramm

konstruieren.



Über einer trivialisierenden offenen Menge  $U_\alpha \subset C$  ist der Identifizierungsmorphismus  $\gamma_\alpha = \gamma|_{U_\alpha}$  lokal wie die Abbildung  $\alpha$  aus Abschnitt 2.3 (Seite 18) gegeben. Eine elementare Rechnung, die wir dem Leser überlassen, zeigt, dass die lokalen Morphismen  $\gamma_\alpha$  zu einem globalen Morphismus verkleben. Wie im Abschnitt 2.3 ist für einen Punkt  $\mu \in C$  mit Faser  $X_\mu := \pi^{-1}(\mu)$  die Faser  $X_\mu$  nodal, wenn  $\tilde{\sigma}$  die Faser  $\tilde{X}_\mu := \tilde{\pi}^{-1}(\mu)$  in zwei unterschiedlichen Punkte schneidet. Die Faser  $X_\mu$  ist kuspidal, wenn  $\tilde{\sigma} \cap \tilde{X}_\mu$  ein Doppelpunkt ist.

Wir bemerken, dass die Verklebungsmorphismen im Allgemeinen nicht von Automorphismen des  $\mathbb{P}_2$  kommen. Aus diesem Grund kann  $\tilde{X}$  im Allgemeinen nicht in ein  $\mathbb{P}_2$ -Bündel über  $C$  eingebettet werden.

**4.1.2. Elementare Transformationen.** Das wesentliche Werkzeug bei der Diskussion von Regelflächen wird die “elementare Transformation” sein, die eine birationale Abbildung zwischen Regelflächen ist. Wir verweisen auf [18, V.5.7.1] für die Definition der elementaren Transformation und für die zugehörige Terminologie.

Wenn  $\pi : Y \rightarrow C$  eine Regelfläche ist und  $(\sigma_i, D_i)_{i=1 \dots n}$  eine Sammlung von Schnitten  $\sigma_i \subset Y$  und effektiven Divisoren  $D_i \in \text{Div}(C)$ , so dass die Träger  $|D_i|$  paarweise disjunkt sind, können wir induktiv wie folgt eine birationale Abbildung

$$\text{elt}_{(\sigma_i, D_i)_{i=1 \dots n}} : Y \dashrightarrow \tilde{Y}$$

zwischen Regelflächen definieren: Wähle einen Index  $j$ , wähle einen abgeschlossenen Punkt  $\mu \in |D_j|$  und führe eine elementare Transformation mit Zentrum  $\pi^{-1}(\mu) \cap \sigma_j$  durch. Ersetze die  $\sigma_i$  durch ihre strikten Transformierten, ersetze die  $D_i$  mit  $D_i - \delta_{ij}\mu$  (hier bezeichnet  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol) und fahre fort, bis alle  $D_i$  gleich Null sind. Es folgt direkt aus der Konstruktion der elementaren Transformation, dass die Zielvarietät  $\tilde{Y}$  und die resultierende birationale Abbildung unabhängig von den diversen Wahlen sind, die es bei der Konstruktion gab.

Das Inverse einer elementaren Transformation kann wieder als elementare Transformation geschrieben werden. Das folgende Lemma zeigt, wie die inverse Transformation in unserer Notation geschrieben werden kann. Der Beweis ist elementar und wird deshalb hier ausgelassen. Die Abbildung 4.1.1 zeigt das Ergebnis des Lemmas in einer einfachen Situation.

**LEMMA 4.1.1 (Gestalt der inversen Transformation).** *Es sei  $\pi : Y \rightarrow C$  eine Regelfläche, es seien  $(\sigma_i)_{i=1 \dots n}$  Schnitte und  $D_i \in \text{Div}(C)$  effektive Divisoren mit disjunktem Träger. Wir nehmen an, dass für jeden Index  $i$  und jeden Punkt  $\mu \in |D_i|$  ein eindeutiger Index  $j$  existiert, so dass  $\pi(D_i \cap D_j) \ni \mu$  ist. Man betrachte die birationale Abbildung  $\text{elt}_{(\sigma_i, D_i)_{i=1 \dots n}} : Y \dashrightarrow \tilde{Y}$ . Wenn  $\tilde{\sigma}_i \subset \tilde{Y}$  die strikten Transformierten der  $\sigma_i$  bezeichnen, und wenn wir*

$$\tilde{D}_i := \sum_{j \neq i, \mu \in |D_j| \setminus \pi(\sigma_i \cap \sigma_j)} \text{mult}_\mu(D_j) \cdot \mu$$

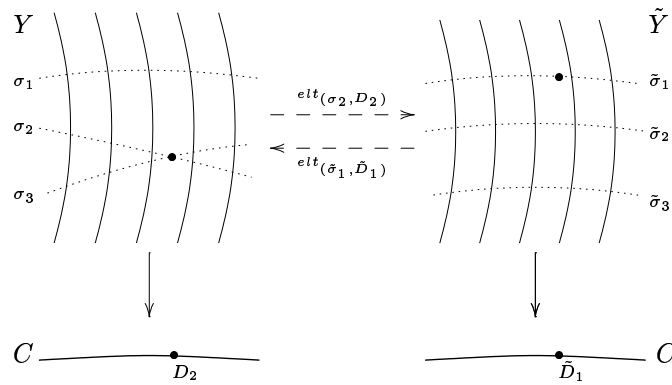


ABBILDUNG 4.1.1. Zueinander inverse elementare Transformationen

setzen, dann ist die inverse Transformation gegeben als

$$\text{elt}_{(\sigma_i, D_i)_{i=1 \dots n}}^{-1} = \text{elt}_{(\tilde{\sigma}_i, \tilde{D}_i)_{i=1 \dots n}}.$$

□

**4.1.3. Projektivität und Basiswechsel.** Um technische Schwierigkeiten bei der Charakterisierung von projektiven Bündeln zu vermeiden werden wir häufig Basiswechsel durchführen. Dabei ist es wichtig, dass ein Bündel durch diese Operation nicht projektiv werden kann.

LEMMA 4.1.2. *Es sei  $\pi : X \rightarrow C$  ein Bündel von singulären ebenen Kubiken und es sei  $\gamma : C' \rightarrow C$  ein endlicher Morphismus zwischen glatten Kurven. Dann ist  $X' := X \times_C C'$  genau dann projektiv, wenn  $X$  projektiv ist.*

BEWEIS. Es ist klar, dass  $X'$  projektiv ist, wenn  $X$  projektiv ist und es bleibt nur noch die andere Richtung zu betrachten. Wir nehmen also an, dass  $X'$  projektiv ist und werden zeigen, dass dies die Projektivität von  $X$  impliziert. Es sei  $f : X' \rightarrow X$  der natürliche Projektionsmorphismus.

Da alle Fasern von  $\pi$  generisch reduziert sind, folgt aus [18, Ex. III.10.2], dass der singuläre Ort  $X_{\text{Sing}}$  keine  $\pi$ -Fasern enthält. Wir können also immer einen reduzierten, irreduziblen und sehr amplen Cartier-Divisor  $H \subset X'$  finden, so dass  $f(H)$  den Verzweigungsort von  $f$  nur in glatten Punkten von  $X$  schneidet – beachte, dass der Verzweigungsort von  $f$  endliche viele  $\pi$ -Fasern sind. Der Beweis ist beendet, wenn wir zeigen, dass  $f(H)$  Cartier ist.

Es folgt aber direkt aus der Konstruktion dass  $f(H)$  Cartier in einer Umgebung des Verzweigungsortes von  $f$  Cartier ist. Wenn  $X_\mu$  auf der anderen Seite irgendeine andere Faser ist, dann finden wir eine (analytische) Umgebung  $U$  von  $X_\mu$ , so dass  $f^{-1}(U)$  in  $k$  Zusammenhangskomponenten  $U^{(1)}, \dots, U^{(k)}$  zerfällt, so dass für alle Indices  $i$  die Abbildung  $f|_{U^{(i)}} : U^{(i)} \rightarrow U$  isomorph ist. In dieser Situation ist klar, dass

$$f(H)|_U = \sum_{i=1 \dots k} f(H \cap U^{(i)})$$

ist, wobei jeder Summand Cartier ist. Das Lemma folgt. □

## 4.2. Charakterisierung von projektiven Bündeln

In diesem Abschnitt werden wir die Hauptergebnisse des Kapitels 4 zusammenfassen. Die Beweise der Aussagen werden aber erst nach Abschnitt 4.3 gebracht, weil wir dort erst den Begriff des oskulierenden Ortes einführen und eine Reihe von grundlegenden Eigenschaften beweisen.

**4.2.1. Bündel von kuspidalen Kurven.** Für Bündel von kuspidalen Kurven ist es besonders einfach, die projektiven Bündel zu charakterisieren.

**SATZ 4.2.1.** *Es sei  $C$  eine glatte Kurve und  $X \rightarrow C$  ein Bündel von kuspidalen ebenen Kubiken. Wenn  $\eta : \tilde{X} \rightarrow X$  die Normalisierung bezeichnet, dann ist  $X$  genau dann projektiv, wenn es einen Schnitt  $\tilde{\sigma}_\infty \subset \tilde{X}$  gibt, der disjunkt zum Urbild des singulären Ortes von  $X$  ist:  $\tilde{\sigma}_\infty \cap \eta^{-1}(X_{\text{Sing}}) = \emptyset$ .*

Der Beweis wird in Abschnitt 4.4 erbracht.

**4.2.2. Bündel von Kubiken mit nodalen Fasern.** In diesem Abschnitt sei  $C$  durchgängig eine glatte Kurve und  $\pi : X \rightarrow C$  ein Bündel von singulären ebenen Kubiken, so dass nicht alle Fasern kussidal sind. Es folgt dann aus der Deformationstheorie, dass alle bis auf endlich viele Fasern nodal sind. Wenn  $\eta : \tilde{X} \rightarrow X$  wieder die Normalisierung bezeichnet, dann ist  $\tilde{X}$  ein  $\mathbb{P}_1$ -Bündel über  $C$  und  $\eta^{-1}(X_{\text{Sing}})$  ist ein reduzierter Doppelschnitt über  $C$ . Nachdem wir – falls nötig – einen Basiswechsel durchführen, können wir annehmen, dass der Doppelschnitt  $\eta^{-1}(X_{\text{Sing}})$  in zwei Schnitte zerfällt, die wir mit  $\tilde{\sigma}_0$  und  $\tilde{\sigma}_\infty$  bezeichnen. Wir erinnern uns in diesem Zusammenhang an Lemma 4.1.2: die Projektivität von Bündeln ist stabil unter Basiswechsel.

Das folgende Lemma gibt eine erste, notwendige Bedingung dafür, dass  $X$  projektiv ist.

**LEMMA 4.2.2.** *Wenn  $X$  projektiv ist, dann sind  $\tilde{\sigma}_0$  und  $\tilde{\sigma}_\infty$  als Cartier-Divisoren auf  $\tilde{X}$  numerisch äquivalent.*

**BEWEIS.** Wenn  $X$  projektiv ist, dann ist der Rang der Picard-Gruppe  $\text{Pic}(X)$  gleich zwei, und der Quotient  $\text{Pic}(\tilde{X})/\eta^*(\text{Pic}(X))$  ist Torsion. Also sind die Divisoren  $\tilde{\sigma}_0$  und  $\tilde{\sigma}_\infty$  numerisch äquivalent, wenn für alle Geradenbündel  $H \in \eta^*(\text{Pic}(X))$  gilt, dass  $H \cdot \tilde{\sigma}_0 = H \cdot \tilde{\sigma}_\infty$  ist. Das aber ist klar, weil die Einschränkungen  $\eta|_{\tilde{\sigma}_0}$  und  $\eta|_{\tilde{\sigma}_\infty}$  jeweils birational auf das Bild sind und weil  $\eta(\tilde{\sigma}_0) = \eta(\tilde{\sigma}_\infty)$  ist.  $\square$

Die Bedingung von Lemma 4.2.2 ist aber nicht hinreichend. Die Formulierung der vollständigen Bedingung wird einfacher, wenn wir die folgende Konstruktion betrachten, die in der Abbildung 4.2.1 gezeigt ist.

Weil  $\tilde{X}$  ein  $\mathbb{P}_1$ -Bündel über  $C$  ist, können wir nach einem weiteren Basiswechsel annehmen, dass  $\tilde{\sigma}_0$  und  $\tilde{\sigma}_\infty$  linear äquivalent sind. Wir betrachten das folgende Diagramm.

$$(4.2.1) \quad \begin{array}{ccccc} \hat{X} & \xleftarrow{\text{elt}(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_\infty)} & \tilde{X} & \xrightarrow{\eta} & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C & \xlongequal{\quad} & C & \xlongequal{\quad} & C \end{array}$$

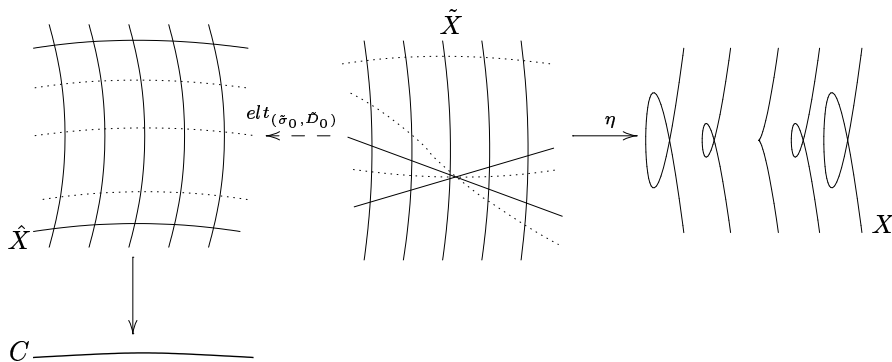


ABBILDUNG 4.2.1. Konstruktion von Bündeln

wobei

$$D_0 := \sum_{p \in \tilde{\sigma}_0 \cap \tilde{\sigma}_\infty} \text{mult}_p(\tilde{\sigma}_0 \cap \tilde{\sigma}_\infty) \cdot \tilde{\pi}(p)$$

und  $\text{mult}_p(\tilde{\sigma}_0 \cap \tilde{\sigma}_\infty)$  die lokale Schnittmultiplizität ist. Die Abbildung  $elt_{(\tilde{\sigma}_0, \tilde{D}_0)}$  ist also die minimale Folge von elementaren Transformationen, so dass die strikten Transformierten  $\sigma_0, \sigma_\infty$  von  $\tilde{\sigma}_0$  und  $\tilde{\sigma}_\infty$  disjunkt werden – beachte dazu, dass es unmittelbar aus der Konstruktion der elementaren Transformationen folgt, dass die Schnittzahl der strikten Transformierten von  $\tilde{\sigma}_0$  und  $\tilde{\sigma}_\infty$  mit jeder Transformation in der Folge  $elt_{(\tilde{\sigma}_0, \tilde{D}_0)}$  um genau 1 sinkt bis schließlich die 0 erreicht ist.

Wir beachten, dass mit  $\tilde{\sigma}_0$  und  $\tilde{\sigma}_\infty$  auch  $\sigma_0$  und  $\sigma_\infty$  linear äquivalent sind, und dass  $\hat{X}$  deshalb isomorph zum trivialen Bündel  $\mathbb{P}_1 \times C$  ist. Die zu  $elt_{(\tilde{\sigma}_0, \tilde{D}_0)}$  inverse Abbildung ist wie folgt beschrieben.

SATZ 4.2.3. *Es gibt effektive Divisoren  $D_i \in \text{Div}(C)$  und disjunkte Schnitte  $(\sigma_i)_{i=1 \dots n} \subset \mathbb{P}_1 \times C$ , die Fasern der Projektion  $\mathbb{P}_1 \times C \rightarrow \mathbb{P}_1$  sind, so dass*

$$elt_{(\tilde{\sigma}_0, \tilde{D}_0)}^{-1} = elt_{(\sigma_i, D_i)_{i=1 \dots n}}$$

ist.

Diese Beschreibung ermöglicht es uns schließlich, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Projektivität von  $X$  zu formulieren. Wir charakterisieren die Divisoren  $\sigma_i$ , die von projektiven Bündeln kommen.

SATZ 4.2.4. *Es sei  $C$  eine glatte Kurve,  $n \in \mathbb{N}$  eine positive ganze Zahl,  $(D_i)_{i=1 \dots n} \in \text{Div}(C)$  beliebige disjunkte und effektive Divisoren und  $\sigma_0, (\sigma_i)_{i=1 \dots n}$  und  $\sigma_\infty$  beliebige (unterschiedliche) Fasern der Projektionsabbildung  $\mathbb{P}_1 \times C \rightarrow \mathbb{P}_1$ . Konstruiere ein Bündel von singulären ebenen Kubiken wie folgt:*

$$(4.2.2) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{P}_1 \times C & \xrightarrow[\text{elementare Transformationen}]{elt_{(\sigma_i, D_i)_{i=1 \dots n}}} & \tilde{X} & \xrightarrow[\text{Identifikation}]{\gamma(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_\infty)} & X \\ \text{Projektion } \downarrow \pi_2 & & \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \pi \\ C & \xlongequal{\quad} & C & \xlongequal{\quad} & C \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Bündel von singulären} \\ \text{ebenen Kubiken} \end{array}$$

wobei  $\gamma_{(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_\infty)}$  die Identifikationsabbildung ist, die im Abschnitt 4.1.1 beschrieben wurde.

In dieser Situation ist das Bündel  $X$  genau dann projektiv, wenn es eine Koordinate auf  $\mathbb{P}_1$  gibt, so dass

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \{[0 : 1]\} \times C \\ \sigma_\infty &= \{[1 : 0]\} \times C \quad \text{und} \\ \sigma_i &= \{[\xi_i : 1]\} \times C\end{aligned}$$

sind, wobei die  $\xi_i$  Einheitswurzeln sind.

Die Konstruktion (4.2.2) ist natürlich das Inverse der Transformation, die im Diagramm (4.2.1) dargestellt ist.

**BEMERKUNG 4.2.5.** Wenn wir die Basiskurve  $C$  und eine Zahl  $n$  fixieren, dann liefert die Konstruktion aus Theorem 4.2.4 eine Abbildung

$$m : \left\{ \begin{array}{l} n\text{-Tupel } (D_i, \sigma_i)_{i=1 \dots n} \\ \text{von Divisoren und Schnitten} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphieklassen von} \\ \text{Bündeln von ebenen Kubiken} \end{array} \right\}.$$

Wenn die Kurve  $C$  nur eine endliche Automorphismengruppe hat, dann wird die Abbildung  $m$  endlich-zu-eins sein. In diesem Sinne können wir sagen, dass die Menge  $P$  von projektiven Bündeln weder offen noch abgeschlossen in der Menge  $M$  aller Bündel von ebenen Kubiken ist. Darüber hinaus ist jede irreduzible Komponente  $P^0 \subset P$  eine Untervarietät einer Komponente  $M^0 \subset M$  und es gilt:

$$\dim P^0 = \frac{1}{2} \dim M^0.$$

### 4.3. Oskulierende Orte

In diesem Abschnitt werden wir die spezielle Geometrie von projektiven Bündeln von singulären ebenen Kubiken untersuchen. Die Resultate werden später in den Abschnitten 4.4–4.6 verwendet, um die Hauptresultate des Kapitels zu zeigen. In diesem Abschnitt nehmen wir stets an, dass  $\pi : X \rightarrow C$  ein projektives Bündel von singulären ebenen Kubiken über einer glatten Kurve ist, und dass  $L \in \text{Pic}(X)$  ein relativ amplex Geradenbündel ist. Wie vorher bezeichnen wir die Normalisierung mit  $\eta : \tilde{X} \rightarrow X$ .

**4.3.1. Der Ort der  $L$ -oskulierenden Punkte.** Wir können wie die  $L$ -oskulierenden Punkte auf den Fasern verwenden, um einen globalen (Multi-)Schnitt  $\tilde{\sigma} \subset \tilde{X}$  zu definieren. Die detaillierte Untersuchung von  $\tilde{\sigma}$  wird den Kern der späteren Argumentation liefern. Zunächst ist es aber wichtig zu beachten, dass die relative Picard-Gruppe in unserer Situation teilbar ist.

**PROPOSITION 4.3.1** (Teilbarkeit der relativen Picard-Gruppe). *Wir bezeichnen den relativen Grad des Geradenbündels  $L$  mit  $k$ ;  $k$  sei also die Schnittzahl von  $L$  mit einer Faser von  $\pi$ . Wir wählen einen Punkt  $\mu \in C$ , eine Einheitskreisscheibe  $\Delta \subset C$ , die um  $\mu$  zentriert sei und setzen  $X_\Delta := \pi^{-1}(\Delta)$ . Nachdem wir  $\Delta$  gegebenenfalls verkleinern, gibt es ein Geradenbündel  $L' \in \text{Pic}(X_\Delta)$ , so dass  $kL' \cong L|_{X_\Delta}$  ist.*

**BEWEIS.** Als ersten Schritt werden wir beweisen, dass  $H^2(X_\Delta, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  ist. Um dies einzusehen erinnern wir daran, dass die Deformationstheorie zeigt, dass – nachdem wir  $\Delta$  gegebenenfalls verkleinern –  $X_\Delta$  von der Form

$$X_\Delta \cong \{(x, [y_0 : y_1 : y_2]) \in \Delta \times \mathbb{P}_2 \mid y_2 y_1^2 - y_0^3 - f(x) y_0^2 y_2\}$$

ist, wobei  $f$  eine Funktion  $f \in \mathcal{O}(\Delta)$  ist. Wenn wir den nicht-normalen Ort mit  $N \subset X_\Delta$  und das Urbild mit  $\tilde{N} := \eta^{-1}(N)$  bezeichnen, dann ist  $N = \Delta \times \{[0 : 0 : 1]\}$  isomorph zu einer Einheitskreisscheibe und  $\tilde{N}$  ist entweder eine Einheitskreisscheibe oder  $\tilde{N}$  ist die Vereinigung von irreduziblen Komponenten, die je isomorph zu  $\Delta$  sind und sich gemeinsam in einem einzigen Punkt schneiden. In dieser Situation verwenden wir die Mayer-Vietoris Sequenz für die reduzierte Kohomologie und erhalten

$$\dots \rightarrow \underbrace{H^1(\tilde{N}, \mathbb{Z})}_{=0} \rightarrow H^2(X_\Delta, \mathbb{Z}) \rightarrow \underbrace{H^2(\tilde{X}_\Delta, \mathbb{Z})}_{=\mathbb{Z}} \oplus \underbrace{H^2(N, \mathbb{Z})}_{=0} \rightarrow \dots$$

Wir verweisen auf [2, prop. 3.A.7, p. 98] für eine nähere Beschreibung dieser Sequenz.

Jetzt wählen wir einen Schnitt  $s \subset X_\Delta$  der vollständig im glatten Ort enthalten ist. Nachdem wir  $\Delta$  wieder verkleinern, wird dies in jedem Fall möglich sein. Betrachte die Exponentialsequenz

$$\dots \longrightarrow H^1(X_\Delta, \mathcal{O}) \xrightarrow{\alpha} H^1(X_\Delta, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\beta} \underbrace{H^2(X_\Delta, \mathbb{Z})}_{\cong \mathbb{Z}} \longrightarrow \dots$$

Das Element  $h := (L|_{X_\Delta} - \mathcal{O}(k \cdot s))$  erfüllt die Bedingung  $\beta(h) = 0$  und ist deshalb in  $\text{Pic}^0(X_\Delta) = \text{Image}(\alpha)$  enthalten. Es sei  $h' \in \alpha^{-1}(h)$  ein Punkt im Urbild. Weil  $H^1(X_\Delta, \mathcal{O})$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist, können wir ein Element  $h'' \in H^1(X_\Delta, \mathcal{O})$  finden, so dass  $h' = k \cdot h''$  ist. Wir können den Beweis also beenden indem wir  $L' := \alpha(h'') \otimes \mathcal{O}(s)$  setzen.  $\square$

S. Helmke hat darauf hingewiesen, dass man die Proposition 4.3.1 auch zeigen kann, indem man das Bündel  $X_\Delta$  in ein Bündel von kuspidalen Kurven deformiert wo die Behauptung dann trivial ist.

Die Teilbarkeit von  $L$  hat zur Folge, dass wir lokal immer eine Komponente des oskulierenden Ortes finden können, die ganz im glatten Teil  $X_{\text{Reg}} \subset X$  enthalten ist.

**KOROLLAR 4.3.2.** *Fixiere einen Punkt  $\mu \in C$ . Wenn  $\Delta \subset C$  eine hinreichend kleine Einheitskreisscheibe um  $\mu$  ist, dann existiert ein  $L$ -oskulierender Schnitt  $\sigma'_1 \subset X_\Delta$ , der ganz im glatten Ort von  $X_\Delta$  liegt. Genauer gesagt, existiert ein Schnitt  $\sigma'_1 \subset X_{\Delta, \text{Reg}}$ , so dass für alle Punkte  $\mu \in \Delta$  und Fasern  $X_\mu := \pi^{-1}(\mu)$  der Schnitt  $\sigma'_1 \cap X_\mu$  ein  $L$ -oskulierender Punkt der Faser  $X_\mu$  ist.*

**BEWEIS.** Es sei  $L' \in \text{Pic}(X_\Delta)$  ein Geradenbündel, so dass  $kL' \cong L$  ist; die Existenz von  $L'$  wird von Proposition 4.3.1 garantiert. Man beachte, dass die direkte Bildgarbe  $R^0\pi_*(L')$  lokal frei vom Rang 1 ist. Deshalb gibt es, nachdem wir  $\Delta$  gegebenenfalls verkleinern, einen Schnitt  $s \in H^0(X_\Delta, L')$ , dessen Einschränkung auf eine beliebige Faser von  $\pi$  nicht identisch verschwindet. Weil der relative Grad von  $L'$  aber 1 ist, ist die Einschränkung von  $s$  auf eine Faser ein Schnitt, der an genau einem glatten Punkt der Faser verschwindet. Dieser Punkt ist  $L$ -oskulierend. Also enthält der Divisor  $\sigma_1 \in |L'|_{X_\Delta}|$ , der zu dem Schnitt  $s$  gehört, ausschließlich glatte  $L$ -oskulierende Punkte und wird von  $\pi$  bijektiv auf die Basis abgebildet.  $\square$

**4.3.2. Der oskulierende Ort in der Umgebung einer nodalen Kurve.** In diesem Abschnitt sei  $C^0 \subset C$  die maximale Menge, so dass alle  $\pi$ -Fasern über  $C^0$  nodale ebene Kubiken sind. Wir nehmen zusätzlich an, dass  $C^0$  nicht leer ist, dass also nodale Fasern existieren.

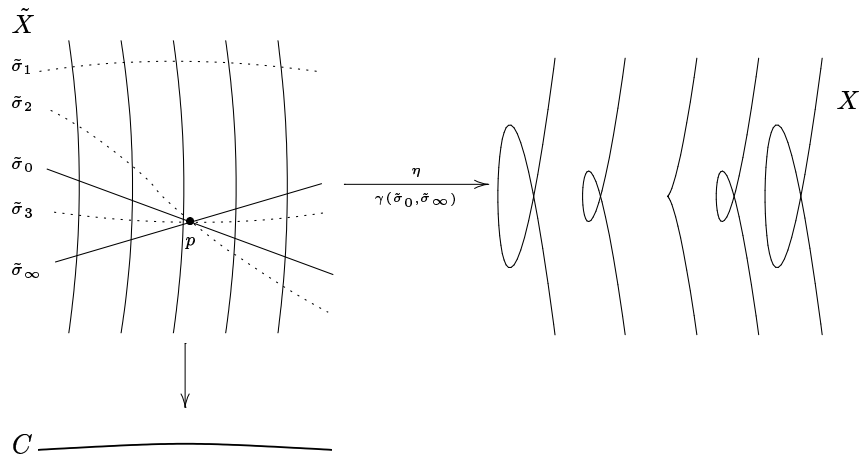


ABBILDUNG 4.3.1. Der oskulierende Ort in der Nähe einer kuspidalen Kurve

Das Korollar 4.3.2 gibt bereits eine vollständige Beschreibung des  $L$ -oskulierenden Ortes in der Nähe einer nodalen Faser.

LEMMA 4.3.3. *Wenn  $k$  der Grad der Einschränkung von  $L$  auf eine  $\pi$ -Faser ist, dann gibt es einen  $k$ -fachen reduzierten Multischnitt  $\sigma' \subset X_{\text{Reg}}^0 \subset X^0 := \pi^{-1}(C^0)$ , so dass dessen Einschränkung auf jede Faser  $\sigma' \cap X_\eta$  genau die  $L$ -oskulierenden Punkte der Faser sind.*

BEWEIS. Es sei  $\mu \in C^0$  irgendein Punkt und  $\Delta \subset C^0$  eine kleine Einheitskreisscheibe, die um  $\mu$  herum zentriert ist. Das Urbild  $X_\Delta := \pi^{-1}(\Delta) \subset X$  wird dann isomorph zu  $C_1 \times \Delta$  sein, wobei  $C_1$  die nodale Kubik bezeichnet. Weiter sei  $\sigma'_1 \subset X_{\Delta, \text{Reg}}$  einer der  $L$ -oskulierenden Schnitte, dessen Existenz durch Korollar 4.3.2 garantiert wird. Wähle einen  $\Delta$ -Isomorphismus  $\iota : \Delta \times \mathbb{C}^* \rightarrow X_{\Delta, \text{Reg}}$ , so dass  $\sigma' = \iota(\Delta \times \{1\})$  ist. Wende dann Lemma 2.1.3 an, um zu sehen, dass  $\sigma'$  wie folgt angegeben werden kann

$$\sigma' = \{\iota(\Delta \times \{\xi_i\}) \mid \xi_i^k = 1\}.$$

Die Behauptung des Lemmas folgt.  $\square$

DEFINITION 4.3.4. Es sei  $\tilde{\sigma} \subset \tilde{X}$  der Abschluss von  $\eta^{-1}(\sigma')$ . Wir nennen die irreduziblen Komponenten  $(\tilde{\sigma}_i)_{i=1 \dots n} \subset \tilde{\sigma}$  die " $L$ -oskulierenden (Multi-)Schnitte".

**4.3.3. Der oskulierende Ort in der Umgebung einer kuspidalen Kurve.** Als nächsten Schritt geben wir Koordinaten auf  $\tilde{X}_\Delta := \tilde{\pi}^{-1}(\Delta)$  an, mit denen sich die  $L$ -oskulierenden Schnitte sogar dann explizit schreiben lassen, wenn  $X_\Delta$  eine kuspide Faser enthält. Die Abbildung 4.3.1 zeigt das Ergebnis in einem einfachen Fall mit  $m = 1$ .

PROPOSITION 4.3.5. *Wir nehmen an, dass das Urbild  $\eta^{-1}(X_{\text{Sing}})$  zwei unterschiedliche Schnitte  $\tilde{\sigma}_0$  und  $\tilde{\sigma}_\infty$  enthält. Wenn ein Punkt  $p \in \tilde{\sigma}_0 \cap \tilde{\sigma}_\infty$  gegeben ist, dann existiert eine Einheitskreisscheibe  $\Delta \subset C$  um  $\tilde{\pi}(p)$  so dass  $\tilde{\pi}^{-1}(\Delta) \cap \tilde{\sigma}$  in  $k$  irreduzible Komponenten  $\tilde{\sigma}_i$  zerfällt, die jeweils Schnitte über  $\Delta$  sind. Desweiteren existiert ein eindeutig bestimmter Index  $1 \leq j \leq k$  so dass  $p \notin \tilde{\sigma}_j$  ist. Alle anderen Komponenten  $\tilde{\sigma}_a, \tilde{\sigma}_b$  mit  $a, b \notin \{0, j, \infty\}$*



enthalten  $p$ . Wenn  $m = \text{mult}_p(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_\infty)$  die lokale Schnittmultiplizität von  $\tilde{\sigma}_0$  und  $\tilde{\sigma}_\infty$  bei  $p$  bezeichnet, dann gilt noch

$$\text{mult}_p(\tilde{\sigma}_a, \tilde{\sigma}_b) = \text{mult}_p(\tilde{\sigma}_a, \tilde{\sigma}_0) = \text{mult}_p(\tilde{\sigma}_a, \tilde{\sigma}_\infty) = m.$$

BEWEIS. Wähle eine Einheitskreisscheibe  $\Delta \subset C$  die um  $\mu := \tilde{\pi}(p)$  zentriert ist und statte  $\Delta$  mit einer Koordinate  $x$  aus. Die Faser  $X_\mu := \pi^{-1}(\mu)$  ist eine kuspidaie Kurve. Nachdem wir  $\Delta$  gegebenenfalls verkleinern, können wir annehmen, dass  $\mu$  der einzige Punkt in  $\Delta$  ist, dessen Urbild eine kuspidaie Kurve ist. Nach Korollar 4.3.2 können wir einen Index  $j$  finden, so dass  $p \notin \tilde{\sigma}_j$  ist. Deshalb können wir Bündelkoordinaten auf  $\tilde{X}_\Delta \cong \Delta \times \mathbb{P}_1$  finden, so dass wir schreiben können

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_0 &= \{([y_1 : y_2], x) \in \mathbb{P}_1 \times \Delta \mid y_1 = x^m y_2\} \\ \tilde{\sigma}_\infty &= \{([y_1 : y_2], x) \in \mathbb{P}_1 \times \Delta \mid y_1 = -x^m y_2\} \\ \tilde{\sigma}_j &= \{([y_1 : y_2], x) \in \mathbb{P}_1 \times \Delta \mid y_1 = 0\}. \end{aligned}$$

Wenn  $\nu \in \Delta$ ,  $\nu \neq \mu$  irgendein Punkt ist, dann parametrisiert die Abbildung  $\eta \circ \iota_\nu$  mit

$$\begin{aligned} \iota_\nu : \mathbb{C}^* &\rightarrow \tilde{\pi}^{-1}(x) \\ t &\mapsto [\nu^m(t+1) : (1-t)] \end{aligned}$$

den glatten Ort von  $\pi^{-1}(\nu)$ . Wir wenden Lemma 2.1.3 mit  $\iota = \eta \circ \iota_\nu$  an und schreiben

$$\tilde{\sigma} \cap \tilde{\pi}^{-1}(\Delta) = \{([y_1 : y_2], x) \in \mathbb{P}_1 \times \Delta \mid y_1(\xi - 1) = x^m y_2(\xi + 1), \xi^k = 1\}.$$

Die Behauptung folgt.  $\square$

#### 4.4. Beweis von Satz 4.2.1

Der Satz 4.2.1 ist eine direkte Konsequenz aus Korollar 4.3.2. Wir nehmen an, dass  $X$  projektiv ist. Wenn jetzt alle Fasern von  $\pi$  kuspidaal sind, dann definiert die Einschränkung von  $L$  auf eine  $\pi$ -Faser einen eindeutigen oskulierenden Punkt, und der lokale Schnitt  $\sigma'_1$ , dessen Existenz in Korollar 4.3.2 gezeigt wurde setzt sich zu einem *globalen* Schnitt  $\tilde{\sigma}_\infty$  fort, der vollständig im glatten Ort von  $X$  enthalten ist.

Wenn auf der anderen Seite ein Schnitt  $\tilde{\sigma}_0$  gegeben ist, dann ist  $\eta(\tilde{\sigma}_\infty)$  Cartier und relativ ample. Das Bündel  $X$  wird also projektiv sein.

#### 4.5. Beweis von Satz 4.2.3

In der Situation vom Satz 4.2.3 folgt unmittelbar aus der Proposition 4.3.5 dass

$$\tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma}_0 = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma}_\infty = (k-1) \tilde{\sigma}_0 \cdot \tilde{\sigma}_\infty$$

ist. Eine elementare Rechnung zeigt, dass die Schnittzahl zwischen den strikten Transformaten von  $\tilde{\sigma}$  und  $\tilde{\sigma}_0$  bei jeder elementaren Transformation in der Sequenz  $\text{elt}_{(\tilde{\sigma}_0, \tilde{D}_0)}$  um  $(k-1)$  fällt.

Wenn also  $\sigma \subset \hat{X} \cong \mathbb{P}_1 \times C$  die strikte Transformation von  $\tilde{\sigma}$  bezeichnet, dann erhalten wir als direkte Konsequenz, dass  $\sigma$ ,  $\sigma_0$  und  $\sigma_\infty$  paarweise disjunkt sind. Es folgt, dass  $\sigma$  in irreduzible Komponenten  $(\sigma_i)_{i=1 \dots k}$  zerfällt, die jeweils Fasern der Projektion  $\mathbb{P}_1 \times C \rightarrow \mathbb{P}_1$  sind. Das wiederum bedeutet, dass der  $L$ -oskulierende Multischnitt  $\tilde{\sigma}$  in  $k$  irreduzible Komponenten zerfällt, die Schnitte über  $C$  sind.

Unter diesen Voraussetzungen können wir das Lemma 4.1.1 über die Gestalt der inversen Abbildung auf  $\text{elt}_{(\tilde{\sigma}_0, \tilde{D}_0)}$  anwenden. Genauer gesagt zeigt das Lemma, dass

$$\text{elt}_{(\tilde{\sigma}_0, \tilde{D}_0)}^{-1} = \text{elt}_{(\sigma_i, D_i)_{i=1 \dots n}}$$

ist, wobei

$$D_i := \sum_{p \in \tilde{\sigma}_0 \cap \tilde{\sigma}_\infty, \tilde{\sigma}_i \not\supset p} \text{mult}_p(\tilde{\sigma}_0 \cap \tilde{\sigma}_\infty) \cdot \tilde{\pi}(p).$$

Damit endet der Beweis von Satz 4.2.3.

#### 4.6. Beweis von Satz 4.2.4

**4.6.1. Hinreichendheit.** Wir beginnen den Beweis, indem wir annehmen, dass  $\sigma_i$  und  $D_i$  wie in Satz 4.2.4 gegeben sind, und indem wir annehmen, dass eine Koordinate auf  $\mathbb{P}_1$  existiert, so dass die  $\sigma_i$  den Einheitswurzeln entsprechen. Wir werden unter diesen Annahmen zeigen, dass die Varietät  $X$  projektiv ist. Genauer gesagt fixieren wir einen Index  $1 \leq i \leq n$  und bezeichnen die strikte Transformierte von  $\sigma_i$  mit  $\tilde{\sigma}_i$ . Wir werden zeigen, dass das Bild  $\sigma'_i := \gamma_{(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_\infty)}(\tilde{\sigma}_i) \subset X$  ein  $\mathbb{Q}$ -Cartier Divisor ist. Also wird ein geeignetes Vielfaches vom  $\sigma'_i$  ein relativ amples Geradenbündel erzeugen, und der Beweis ist beendet.

Wenn die Konstruktion aus Satz 4.2.4 nur drei Schnitte  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  und  $\sigma_\infty$  involviert, dann ist es klar, dass die strikte Transformierte  $\tilde{\sigma}_1 \subset \tilde{X}$  von  $\sigma_1$  disjunkt zu den strikten Transformaten  $\tilde{\sigma}_0$  und  $\tilde{\sigma}_\infty$  ist. Also schneidet das Bild  $\sigma'_1$  den singulären Ort  $X_{\text{Sing}}$  von  $X$  nicht und ist daher Cartier.

Wenn in der Konstruktion mehr als drei Schnitte verwendet werden und  $\sigma'_i$  nicht zufälligerweise bereits Cartier ist, dann wird die Argumentation komplizierter. Es sei  $\mu \in C$  ein beliebiger Punkt, so dass  $\sigma'_i$  den singulären Ort  $X_{\text{Sing}}$  über  $\mu$  trifft. Nach Konstruktion existiert dann ein eindeutiger Index  $j$ , so dass  $\mu \in |D_j|$  ist. Es folgt, dass die strikte Transformierte  $\tilde{\sigma}_j$  von  $\sigma_j$  über  $\mu$  weder  $\tilde{\sigma}_0$  noch  $\tilde{\sigma}_\infty$  schneidet:

$$\tilde{\pi}(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_j) \not\supset \mu \quad \text{und} \quad \tilde{\pi}(\tilde{\sigma}_\infty, \tilde{\sigma}_j) \not\supset \mu.$$

Wir können also eine geeignete Einheitskreisscheibe  $\Delta \subset C$  finden, die um  $p$  zentriert ist, und wir können Koordinaten  $x$  um  $\Delta$  und Bündelkoordinaten  $[y_0 : y_1]$  finden, so dass wir wie im Beweis der Proposition 4.3.5 schreiben können

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_0 &= \{([y_1 : y_2], x) \in \mathbb{P}_1 \times \Delta \mid y_0 = x^m y_1\} \\ \tilde{\sigma}_\infty &= \{([y_1 : y_2], x) \in \mathbb{P}_1 \times \Delta \mid y_0 = -x^m y_1\} \\ \tilde{\sigma}_j &= \{([y_1 : y_2], x) \in \mathbb{P}_1 \times \Delta \mid y_0 = 0\} \end{aligned}$$

Eine elementare Rechnung unter Verwendung des Lemmas 2.1.3 und der Annahme, dass Koordinaten auf  $\mathbb{P}_1$  existieren, so dass  $\sigma_i$  und  $\sigma_j$  von der Form  $\{\text{Einheitswurzel}\} \times C$  sind, zeigt, dass

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i &= \left\{ ([y_1 : y_2], x) \in \mathbb{P}_1 \times \Delta \mid y_0 = -\frac{\xi+1}{\xi-1} x^m y_1 \right\} \\ &= \left\{ ([y_1 : y_2], x) \in \mathbb{P}_1 \times \Delta \mid \underbrace{y_0(\xi-1) + x^m y_1(\xi+1)}_{=: f(x, y_0, y_1)} = 0 \right\} \end{aligned}$$

ist, wobei  $\xi$  eine nicht-triviale Einheitswurzel ist. Wir fixieren eine Zahl  $k$ , so dass  $\xi^k = 1$  ist. Wir werden zeigen, dass  $\sigma'_i|_{X_\Delta}$  ein  $k$ -Cartier Divisor ist. Wir erinnern dazu an den Abschnitt 4.1.1, wo die Identifikationsabbildung  $\gamma_{(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_\infty)}$  konstruiert wurde, die sich in lokalen

Koordinaten als

$$\begin{aligned} \gamma_\Delta : \Delta \times \mathbb{C} &\rightarrow \Delta \times \mathbb{C}^2 \\ (x, y_0) &\mapsto (x, y_0^2 - x^{2m}, y_0(y_0^2 - x^{2m})) \end{aligned}$$

schreiben lässt. Insbesondere ist das Bild von  $\gamma_\Delta$  isomorph zu  $\text{Spec } R$ , wobei  $\gamma_\Delta^\#(R) \subset \mathbb{C}[x, y_0]$  der Unterring ist, der von den Konstanten  $\mathbb{C}$ , von  $x$ , von  $y_0^2$  und von dem Ideal  $(y_0^2 - x^{2m})$  erzeugt wird. Wir verweisen auf [18, defn. auf S. 72] für die Notation  $\gamma_\Delta^\#$ . Um also zu zeigen, dass  $\gamma_{(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_\infty)}(\tilde{\sigma}_1)$   $k$ -Cartier ist, genügt es, zu zeigen, dass  $f(x, y_0, 1)^k \in \gamma_\Delta^\#(R)$  ist. Dazu zerlegen wir  $f^k$  wie folgt.

$$\begin{aligned} f(x, y_0, 1)^k &= [(x^m - y_0) + (x^m + y_0)\xi]^k \\ &= \sum_{i=0 \dots k} \binom{k}{i} (x^m - y_0)^i (x^m + y_0)^{k-i} \xi^{k-i} \\ &= (x^m + y_0)^k + (x^m - y_0)^k + (x^m - y_0)(x^m + y_0)(\text{Rest}) \\ &= \sum_{i=0 \dots k} \binom{k}{i} [x^{m(k-i)} y_0^i + x^{m(k-i)} (-y_0)^i] \\ &\quad + (x^m - y_0)(x^m + y_0)(\text{Rest}) \\ &= 2 \cdot \underbrace{\sum_{i=0 \dots k, i \text{ gerade}} \binom{k}{i} x^{m(k-i)} y_0^i}_{=: A} - \underbrace{(y_0^2 - x^{2m})(\text{Rest})}_{=: B} \end{aligned}$$

Es ist klar, dass jeder Summand von  $A$  in  $\gamma_\Delta^\#(R)$  enthalten ist, weil  $y_0$  nur mit geradzahigen Exponenten vorkommt. Analog gilt  $B \in \gamma_\Delta^\#(R)$ , weil  $B$  im Ideal  $(y_0^2 - x^{2m})$  enthalten ist. Es folgt, dass  $f^k \in \gamma_\Delta^\#(R)$  ist, und der Beweis ist beendet.

**4.6.2. Notwendigkeit.** Es bleibt zu zeigen, dass die Bedingungen des Satzes 4.2.4 auch notwendig sind. Dafür nehmen wir an, dass  $X$  projektiv ist. Der Beweis wird dann beendet sein, wenn wir zeigen, dass diese Annahme die Existenz einer Koordinate auf  $\mathbb{P}_1$  impliziert, so dass  $\sigma_0$ ,  $\sigma_\infty$  und  $\sigma_i$  für gewisse Einheitswurzeln  $\xi_i$  zu  $[0 : 1]$ ,  $[1 : 0]$  und  $[\xi_i : 1]$  korrespondieren.

Um dies zu erreichen, wählen wir einen allgemeinen Punkt  $\mu \in C$ . Die Faser  $X_\mu := \pi^{-1}(C)$  wird dann eine nodale Kurve sein. Nach dem Satz von Riemann-Roch existiert ein Punkt  $p \in X_\mu$ , so dass  $\mathcal{O}_{X_\mu}(kp) \cong L|_{X_\mu}(kp)$  ist. Es folgt direkt aus Lemma 2.1.3, dass

- (1) wir Koordinaten auf  $\tilde{X}_\mu = \eta^{-1}(X_\mu)$  wählen können, so dass  $\tilde{\sigma}_0 \cap \tilde{X}_\mu$  zu  $[0 : 1]$  korrespondiert,
- (2)  $\tilde{\sigma}_\infty \cap \tilde{X}_\mu$  zu  $[1 : 0]$  korrespondiert und
- (3) die  $L$ -oskulierenden Punkte zu  $[\xi_i : 1]$  korrespondieren, wobei die  $\xi_i$  Einheitswurzeln sind.

Man beachte, dass die rationale Abbildung  $\text{elt}_{(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_0)}$  in einer Umgebung von  $\tilde{X}_\mu$  einen Isomorphismus induziert und benutze die Koordinaten auf  $\tilde{X}_\mu$ , um globale Koordinaten auf  $\hat{X} \cong \mathbb{P}_1 \times C \cong \tilde{X}_\mu \times C$  zu definieren. Diese Koordinate hat die gewünschten Eigenschaften, und der Beweis von Satz 4.2.4 ist damit beendet.



## **Teil 2**

# **Kontaktmannigfaltigkeiten**



## Kontaktmannigfaltigkeiten

Kontaktmannigfaltigkeiten sind Mannigfaltigkeiten, die ein nicht-entartetes Hyperebenenfeld besitzen. Das Interesse an komplexen Kontaktmannigfaltigkeiten kommt im Wesentlichen von Klassifikationsfragen aus der Riemannschen Geometrie. Für die algebraischen Geometer, die mit diesen Fragen vielleicht nicht ganz vertraut sind, bringen wir deshalb zuerst einen kurzen Überblick über die Riemannsche Theorie, soweit sie für das Studium der Kontaktmannigfaltigkeiten interessant ist. Der interessierte Leser findet in dem gut lesbaren Übersichtsartikel [4] eine viel ausführlichere Darstellung.

*Reelle* Kontaktmannigfaltigkeiten werden schon seit langem studiert. Eine Einführung findet sich in V. Arnolds Buch [1, app. 4] über klassische Mechanik. Der Stand der Forschung ist in H. Hofers ICM-Vortrag [20] dargelegt.

### 5.1. Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit spezieller Holonomiegruppe

Die Holonomie ist ein wichtiger Begriff der Riemannschen Geometrie, der von É. Cartan eingeführt wurde, um die symmetrischen Räume zu klassifizieren. Die Holonomie ist in vielen Büchern zur Riemannschen Geometrie, zum Beispiel in [16], ausführlich erklärt.

**5.1.1. Riemannsche Holonomie.** Es sei  $M$  eine zusammenhängende orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $x \in M$  ein Punkt. Wenn ein glatter Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = x$  gegeben ist, dann können wir einen Tangentialvektor  $\vec{v} \in T_M|_x$  auf kanonische Weise entlang des Weges bewegen und so einen Tangentialvektor  $\vec{v}' \in T_M|_{\{\gamma(1)\}}$  erhalten. Wenn  $\dim M = 2$  ist, ist dieser Paralleltransport wie in Abbildung 5.1.1 dadurch gegeben, dass wir fordern, dass die Längen von  $\vec{v}$  und  $\vec{v}'$  gleich sein sollen und dass der Winkel von  $\vec{v}$  beziehungsweise  $\vec{v}'$  zur Kurve  $\gamma$  konstant sein soll. In höheren Dimensionen ist eine kompliziertere Konstruktion nötig – wir verweisen zum Beispiel auf [1, app. 1].

Die “Holonomiegruppe” ist die Menge der Automorphismen des Tangentialraumes  $T_M|_x$ , die wir durch Paralleltransport entlang geschlossener, stückweise glatter Wege durch  $x$  erhalten. Die reduzierte Holonomiegruppe ist analog definiert, wobei wir allerdings nur



ABBILDUNG 5.1.1. Paralleltransport entlang einer glatten Kurve

$\dim M$	reduzierte Holonomiegruppe	Geometrie
$m$	$SO(m)$	allgemein
$2m, m \geq 2$	$U(m)$	Kähler
$2m, m \geq 2$	$SU(m)$	Ricci-flach Kähler
$4m, m \geq 2$	$Sp(m)Sp(1)$	quaternion-Kähler
$4m, m \geq 2$	$Sp(m)$	hyperkähler
7	$G_2$	exzeptionell
8	$Spin(7)$	exzeptionell

TABELLE 1. Klassifikation der Holonomiegruppen

Null-homotope Wege verwenden. Diese reduzierte Holonomiegruppe ist eine zusammenhängende Liesche Untergruppe der Gruppe der orthogonalen Transformationen von  $T_M|_x$  und kann deshalb mit einer Untergruppe der orthogonalen Gruppe  $SO(\dim M)$  identifiziert werden. Die Konjugationsklasse dieser Untergruppe hängt dabei weder von der Wahl von  $x$  noch von der Wahl der Koordinaten auf  $T_M|_x$  ab. Wir betrachten im Folgenden meist einfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, auf denen die Holonomiegruppe und die reduzierte Holonomiegruppe übereinstimmen.

Wir nennen eine Riemannsche Mannigfaltigkeit “irreduzibel”, wenn die Darstellung der Holonomiegruppe auf  $T_M|_x$  irreduzibel ist. Das folgende Theorem zeigt, wie Riemannsche Mannigfaltigkeiten aus irreduziblen Mannigfaltigkeiten hervorgehen.

**SATZ 5.1.1** (Zerlegungssatz von G. de Rham, [8]). *Es sei  $M$  eine kompakte, einfach-zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine kanonische Zerlegung  $M \cong \times M_i$ , wobei jeder Faktor  $M_i$  eine irreduzible Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.*  $\square$

Trotz der sehr allgemeinen Definition treten nur sehr wenige Gruppen als Holonomiegruppen auf. Die symmetrischen Räume, die im folgenden Satz ausgeschlossen sind, sind gut verstandene, klassifizierte Räume, die mit Lie-Gruppen assoziiert sind; der interessierte Leser findet in [19] eine gründliche Einführung.

**SATZ 5.1.2** (M. Berger, [6]). *Es sei  $M$  eine irreduzible, einfach-zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, die kein symmetrischer Raum ist. Dann ist die Konjugationsklasse der Holonomiegruppe in Tabelle 1 enthalten.*  $\square$

Auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten gibt es eine 1:1-Korrespondenz zwischen Tensorfeldern, die invariant unter Paralleltransport sind, und Tensoren auf  $T_M|_x$ , die invariant unter der Holonomiegruppe sind. Diese Korrespondenz ist unter dem Namen “Holonomieprinzip” bekannt. Wenn  $M$  zum Beispiel Kählersch ist, dann gibt es auf  $M$  eine flache komplexe Struktur, weil die Gruppe  $U(m)$  eine komplexe Struktur auf  $T_M|_x$  stabilisiert.

**5.1.2. Quaternion-Kählersche Mannigfaltigkeiten.** In dieser Arbeit werden wir uns mit quaternion-Kählerschen Mannigfaltigkeiten beschäftigen; dies sind per Definition solche Mannigfaltigkeiten, deren Holonomiegruppe in  $Sp(1)Sp(m)$  liegt<sup>1</sup>. Dabei identifizieren wir die Gruppe  $Sp(1)$  mit der Gruppe der Einheitsquaternionen, die durch Homothetien auf

<sup>1</sup>Einige Autoren schließen die hyperkählerschen Mannigfaltigkeiten aus und fordern zusätzlich, dass die skalare Krümmung stets positiv oder stets negativ ist.



$\mathbb{H}^m \cong \mathbb{R}^{4m}$  wirken, und identifizieren  $Sp(m)$  mit der quaternion-unitären Gruppe, also der Gruppe der  $\mathbb{H}$ -linearen Morphismen, die die hermitesche Form  $\psi(z, z') = \sum_r z_r \overline{z'_r}$  erhalten – wir verweisen wieder auf [4, chap. 3].

Die quaternion-Kählerschen Mannigfaltigkeiten können als quaternionisches Äquivalent zu den gewöhnlichen Kählerschen Mannigfaltigkeiten verstanden werden. Eine Mannigfaltigkeit  $M$ , deren Holonomiegruppe isomorph zu  $Sp(m)$  ist, besitzt also 3 komplexe Strukturen  $I, J$  und  $K$ , die von den quaternionischen Multiplikationen kommen. Die größere Gruppe  $Sp(1)Sp(m)$  stabilisiert zwar noch den Unterraum von  $End(T_M|_x)$ , der von den drei komplexen Multiplikationen aufgespannt wird, aber nicht mehr jede einzelne komplexe Struktur. Die Gruppe  $Sp(1)Sp(m)$  kann also nicht in die unitäre Gruppe  $U(2m)$  eingebettet werden, und die Mannigfaltigkeit  $M$  ist im Allgemeinen nicht komplex. Es gibt aber die folgende Konstruktion von S. Salamon, die einer quaternion-Kählerschen Mannigfaltigkeit eine komplexe Mannigfaltigkeit  $X$  zuordnet. Dazu betrachtet man zuerst das Rang-3 Unterbündel  $V$  des Endomorphismenbündels  $End(T_M)$ , das von den drei komplexen Multiplikationen aufgespannt wird. Die Mannigfaltigkeit  $X$  ist dann das  $S^2$ -Bündel über  $M$ , das wir erhalten, indem wir in jeder Faser von  $V$  die Einheitssphäre nehmen.

**SATZ 5.1.3** (S. Salamon, [45]). *Es existiert ein kanonisches konstruiertes Bündel  $p : X \rightarrow M$ , wobei  $X$  eine komplexe Mannigfaltigkeit ist und die Fasern von  $p$  komplexe rationale Kurven sind.*  $\square$

Wir nennen  $X$  den “Twistorraum” über  $M$ . Twistorräume tragen zusätzlich zu der komplexen Struktur noch weitere Strukturen. Zum einen gibt die Riemannsche Metrik auf  $M$  eine Kähler-Einstein Metrik auf  $X$ ; zum anderen existiert auf  $X$  ein nicht-entartetes Hyperbelenfeld. Damit ist  $X$  eine “Kontaktmannigfaltigkeit”, die wir in der Definition 5.2.1 weiter unten präzise erklären werden.

Es wurde bereits in Bergers Arbeit [6] gezeigt, dass die Metrik der quaternion-Kählerschen Mannigfaltigkeiten die Einsteinbedingung erfüllt. Die skalare Krümmung  $k$  ist deshalb konstant, und die Geometrie von  $M$  hängt wesentlich vom Vorzeichen dieser Krümmung ab.

- Für  $k < 0$  gibt es viele Beispiele von nicht-kompakten, nicht-symmetrischen Mannigfaltigkeiten, deren Twistorräume keine kanonische Kählersche Struktur zu tragen scheinen. Es ist offen, ob es kompakte Beispiele gibt.
- Falls  $k = 0$  ist, ist  $X$  eine hyperkählersche Mannigfaltigkeit. Diese Räume möchten wir hier nicht studieren. Die hyperkählerschen Mannigfaltigkeiten sind in dem Übersichtsartikel [4] ausführlicher besprochen.
- Für  $k > 0$  ist jede vollständige Mannigfaltigkeit kompakt und der Twistorraum ist eine projektive komplexe Mannigfaltigkeit. Die einzigen Beispiele, die es gibt, sind gewisse symmetrische Räume, die in der Arbeit [48] klassifiziert wurden und Wolf-Räume genannt werden.

Die folgende Vermutung, die vielleicht zum ersten Mal von J. Wolf formuliert wurde, ist das Leitmotiv für den Rest dieser Arbeit.

**VERMUTUNG 5.1.4.** *Jede kompakte quaternion-Kählersche Mannigfaltigkeit mit positiver skalarer Krümmung ist ein Wolf-Raum.*

Wir werden in dieser Arbeit die projektiven Kontaktmannigfaltigkeiten studieren, um einige Teilprobleme zu lösen, die mit der Vermutung 5.1.4 im Zusammenhang stehen.

## 5.2. Definition von Kontaktmannigfaltigkeiten

Wir haben oben geschrieben, dass eine Kontaktmannigfaltigkeit eine Mannigfaltigkeit mit einem nicht-entarteten Hyperebenenfeld ist. Wir werden diese Definition jetzt präzisieren.

DEFINITION 5.2.1. Es sei  $X$  eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension  $2n + 1$ . Wir nennen  $X$  eine “Kontaktmannigfaltigkeit”, wenn es eine Sequenz

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow T_X \xrightarrow{\theta} L \longrightarrow 0$$

von Vektorbündeln gibt, wobei  $L \in \text{Pic}(X)$  ein Geradenbündel ist, und der Vektorbündelmorphismus

$$(5.2.1) \quad N : F \otimes F \rightarrow L,$$

der von der Lie-Klammer induziert wird, an jedem Punkt von  $X$  nicht-entartet ist.

BEMERKUNG 5.2.2. Die Lie-Klammer ist eine schiefsymmetrische Abbildung, die zwei Vektorfelder  $\vec{v}$  und  $\vec{v}'$  nimmt und ein neues Vektorfelder  $[\vec{v}, \vec{v}']$  liefert. Wir können die Lie-Klammer also als Garbenabbildung

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{T}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{T}_X$$

auffassen, die natürlich in keiner Weise eine lineare Abbildung von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln ist. Eine elementare Rechnung, die wir gleich bringen, zeigt allerdings, dass die in der Formel (5.2.1) beschriebene Einschränkung und Komposition mit  $\theta$ , also die Abbildung  $N = \theta \circ [\cdot, \cdot]|_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}}$  sehr wohl linear ist. Die Abbildung  $N \in H^0(X, \mathcal{F}^* \otimes \mathcal{F}^* \otimes L)$  wird traditionell als “O’Neill-Tensor” bezeichnet.

Um die Linearität einzusehen, genügt es, eine offene Menge  $U \subset X$  zu betrachten. Wir wählen lokale Bündelkoordinaten für  $L$  und identifizieren  $\theta$  so mit einer 1-Form  $\theta \in H^0(U, \Omega_X^1|_U)$ . Als nächstes erinnern wir an die folgende Formel aus der Differentialgeometrie [47, prop. 2.25(e) auf Seite 70], die die Ableitung einer Differentialform mit der Lie-Klammer verbindet. Wenn  $\vec{X}_0$  und  $\vec{X}_1 \in H^0(U, T_X|_U)$  zwei Vektorfelder sind, dann gilt:

$$(5.2.2) \quad d\theta(\vec{X}_0, \vec{X}_1) = \vec{X}_0(\theta(\vec{X}_1)) - \vec{X}_1(\theta(\vec{X}_0)) - \theta([\vec{X}_0, \vec{X}_1]).$$

Im Spezialfall, wo  $\vec{X}_0$  und  $\vec{X}_1 \in H^0(U, F|_U)$  Schnitte im Unterbündel  $F$  sind, reduziert sich die Formel (5.2.2) zu

$$(5.2.3) \quad N(\vec{X}_0, \vec{X}_1) = \theta([\vec{X}_0, \vec{X}_1]) = -d\theta(\vec{X}_0, \vec{X}_1)$$

und die Linearität ist offenbar.

Gelegentlich ist es nützlich, die folgende, zu 5.2.1 äquivalente Definition zu verwenden.

DEFINITION 5.2.3. Es sei  $X$  eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension  $2n + 1$ . Wir nennen  $X$  eine “Kontaktmannigfaltigkeit”, wenn ein Geradenbündel  $L \in \text{Pic}(X)$  existiert, und wenn es eine  $L$ -wertige 1-Form  $\theta \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L)$  gibt, so dass die Form

$$\theta \wedge (d\theta)^{\wedge n} \in H^0(X, K_X \otimes L^{\otimes(n+1)})$$

an keiner Stelle von  $X$  verschwindet. Wir nennen  $\theta$  die “Kontaktform” auf  $X$ .

BEMERKUNG 5.2.4. In völliger Analogie zur Bemerkung 5.2.2 stellen wir fest, dass die äußere Ableitung  $d\theta$  nicht wohldefiniert ist, sondern von der Wahl einer Bündelkoordinate abhängt. Wieder zeigt eine elementare Rechnung, dass der Ausdruck  $\theta \wedge (d\theta)^{\wedge k}$  für alle  $k$  wohldefiniert ist.

### 5.3. Einfache Eigenschaften

Wir erwähnen in diesem Abschnitt einige elementare Eigenschaften der komplexen Kontaktmannigfaltigkeiten. Die erste Bemerkung folgt unmittelbar aus der Definition 5.2.3.

BEMERKUNG 5.3.1. Wenn  $X$  eine Kontaktmannigfaltigkeit der Dimension  $2n + 1$  ist, dann ist  $-K_X \cong L^{\otimes n+1}$ .

Die zweite Eigenschaft ist eine Anwendung des Satzes von Frobenius in unserer Situation. Der Zusammenhang zwischen der nicht-Entartung des O’Neill-Tensors und der Existenz von Untermannigfaltigkeiten, die überall tangential zu  $F$  sind, ist in [1, app. 1] besonders gut erklärt.

SATZ 5.3.2 (Frobenius). *Wenn  $Y \subset X$  eine (nicht notwendig abgeschlossene) analytische Untermannigfaltigkeit ist, die überall tangential zum Hyperebenenfeld  $F$  ist, dann ist  $\dim Y \leq n$ .*  $\square$

DEFINITION 5.3.3. Wir nennen zu  $F$  tangential Untermannigfaltigkeiten “ $F$ -integral”. Eine Untervarietät  $Y \subset X$  heißt  $F$ -integral, wenn der reguläre Ort  $Y_{\text{Reg}}$   $F$ -integral ist. Die  $F$ -integralen Untervarietäten maximaler Dimension nennt man traditionell “Legendresch”<sup>2</sup>.

### 5.4. Beispiele

Bevor wir spezielle Kontaktmannigfaltigkeiten näher untersuchen ist es sinnvoll, Beispiele zu besprechen. Das wichtigste Beispiel ist der affine Raum.

BEISPIEL 5.4.1. Es sei  $X \cong \mathbb{C}^{2n+1}$ ,  $L$  sei das triviale Bündel und  $F$  sei als Kern der 1-Form

$$(5.4.1) \quad \theta := dz_0 + \sum_{i=1 \dots n} z_i dz_{n+1}.$$

gegeben. Man rechnet die nicht-Entartung der Form  $\theta$  direkt nach:

$$\theta \wedge (d\theta)^{\wedge n} = (\text{const}) \cdot dz_0 \wedge \dots \wedge dz_{2n+1}.$$

Die Abbildung 5.4.1 zeigt diese “Standardstruktur” im 3-dimensionalen Fall. In der Abbildung sind auch einige  $F$ -integrale Kurven eingezeichnet.

Das Darboux-Theorem der reellen symplektischen Geometrie [1, 8.7.2], eine Art Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren für Schnitte in Vektorbündeln, funktioniert ohne Änderung auch in der komplexen Kontakt-Situation und besagt, dass es für jeden Punkt einer komplexen Kontaktmannigfaltigkeit immer lokale Koordinaten gibt, so dass die Kontaktform wie in Gleichung (5.4.1) geschrieben werden kann. Insbesondere haben komplexe Kontaktmannigfaltigkeiten keine lokalen Invarianten.

---

<sup>2</sup>In einigen Arbeiten, zum Beispiel [34] und [23], werden  $F$ -integrale Untervarietäten maximaler Dimension auch als “Lagrangesch” bezeichnet.

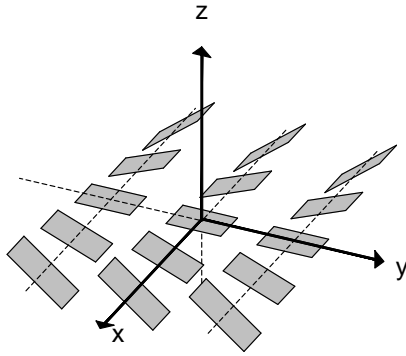


ABBILDUNG 5.4.1. Standard-Kontaktstruktur  $\theta = dz + ydx$ .

**5.4.1. Symplektifizierung der Kontaktstruktur.** Um weitere Beispiele zu studieren, ist es nützlich, die folgende Beobachtung zu machen: Wenn  $L^\times = L \setminus \{0\}$  der Totalraum des Bündels  $L$  ohne den Nullschnitt ist, also den Totalraum des zu  $L$  gehörenden  $\mathbb{C}^*$ -Prinzipalbündels bezeichnet, und wenn  $\pi : L^\times \rightarrow X$  die natürliche Projektion ist, dann ist das zurückgezogene Bündel  $\pi^*(L)$  trivial, und es gibt eine natürliche Trivialisierung

$$\iota : \pi^*(L) \rightarrow \mathcal{O}_{L^\times}.$$

Eine elementare Rechnung ergibt, dass  $\omega := d(\iota \circ \pi^*(\theta))$  eine symplektische 2-Form auf  $L^\times$  ist, die unter der natürlichen  $\mathbb{C}^*$ -Wirkung auf  $L^\times$  mit Gewicht 1 transformiert<sup>3</sup>.

Diese Konstruktion entspricht genau der Symplektifizierung einer reellen Kontaktmannigfaltigkeit, die zum Beispiel in [1, app. 4] ausführlich besprochen ist. Der wesentliche Unterschied zur reellen Situation ist, dass das  $\mathbb{C}^*$ -Bündel  $L^\times$  nicht kompakt ist. Im reellen ist die Symplektifizierung ein  $S^1$ -Bündel über der Basis und deshalb kompakt.

**5.4.2. Weitere Beispiele.** Die Symplektifizierung liefert eine Korrespondenz zwischen “richtig” transformierenden symplektischen Formen auf  $\mathbb{C}^*$ -Prinzipalbündeln und Kontaktstrukturen auf der Basis. Diese Korrespondenz liefert die folgenden Beispiele, die wir hier ohne großen Beweis erwähnen. Wir verweisen auf [39, sect. 2] für eine ausführliche Besprechung.

**BEISPIEL 5.4.2.** Es sei  $V \cong \mathbb{C}^{2n+2}$  ein symplektischer Vektorraum. Dann gibt die symplektische Struktur auf  $V$  eine Kontaktstruktur auf dem projektiven Raum<sup>4</sup>  $\mathbb{P}(V^*) \cong \mathbb{P}_{2n+1}$ . Die Kontaktstruktur auf  $\mathbb{P}_{2n+1}$  ist nicht eindeutig, weil es viele symplektische Strukturen auf  $V$  gibt.

<sup>3</sup>Es gilt also für  $t \in \mathbb{C}^*$ , dass  $t^*(\omega) = t \cdot \omega$  ist. In der Literatur ist die verwirrende Bezeichnung üblich, dass “ $\omega$  invariant unter der  $\mathbb{C}^*$ -Wirkung” ist.

<sup>4</sup>Wieder verwenden wir die Grothendiecksche Notation  $\mathbb{P}(V^*) := (V \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ . Wir weisen darauf hin, dass diese Bezeichnungsweise ausserhalb der algebraischen Geometrie unüblich ist. Die Notation  $\mathbb{P}(T_X)$  aus Beispiel 5.4.3 treibt Differentialgeometer in die Trunksucht.

BEISPIEL 5.4.3. Es sei  $Y$  eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann ergibt die übliche symplektische Struktur auf dem Kotangentenraum  $T_Y^*$ , die wir durch Winkel- und Wirkungskoodinaten erhalten [1, sect. 8.1.2], eine Kontaktstruktur auf dem projektivierten Raum  $\mathbb{P}(T_Y)$ . Die Kontaktstruktur auf  $\mathbb{P}(T_Y)$  ist genau dann eindeutig, wenn das Bündel  $T_Y^*$  keine Automorphismen besitzt. Dies wird in [34, prop. 2.14] nachgerechnet.

Das nächste Beispiel ist etwas komplizierter. Die Arbeit [3, sect. 2] bespricht das Beispiel in großer Ausführlichkeit.

BEISPIEL 5.4.4. Es sei  $G$  eine einfache Lie-Gruppe, die auf der dualen Liealgebra  $\mathfrak{g}^*$  mittels der koadjungierten Darstellung wirkt. Dann gibt es auf den Bahnen der  $G$ -Wirkung eine natürliche symplektische Struktur, die Kostant-Kirillov-Struktur [1, app. 2]. Die zugehörige Wirkung auf  $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$  hat genau eine abgeschlossene Bahn. Dieser homogene Raum besitzt dann eine Kontaktstruktur. Die so entstehenden homogenen Kontaktmannigfaltigkeiten sind genau die Twistorräume über den Wolf-Räumen. Eine Liste dieser Kontaktmannigfaltigkeiten findet sich in [4, sect. 4.3]. Falls  $G = Sp(2n)$  ist, erhalten wir den projektiven Raum  $\mathbb{P}_{2n-1}$  aus Beispiel 5.4.2.

Weitere Beispiele von projektiven Kontaktmannigfaltigkeiten sind nicht bekannt und man nimmt an, dass es auch keine gibt. Die folgende Vermutung würde die Vermutung 5.1.4 implizieren.

VERMUTUNG 5.4.5. *Es sei  $X$  eine projektive Kontaktmannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Mannigfaltigkeit  $Y$ , so dass  $X \cong \mathbb{P}(T_Y)$  ist, oder  $X$  ist eines der homogenen Beispiele 5.4.4.*

Wenn die Vermutung 5.4.5 richtig wäre, würde jede projektive Kontaktmannigfaltigkeit  $X$  mit  $b_2(X) = 1$  der Twistorraum über einer geeigneten quaternion-Kählerschen Mannigfaltigkeit sein. C. LeBrun hat die verwandte Teilvermutung formuliert, dass es auf einer projektiven Kontaktmannigfaltigkeit  $X$  nur in Spezialfällen mehr als eine Kontaktstruktur geben kann.

VERMUTUNG 5.4.6 (C. LeBrun, [40]). *Es sei  $X$  eine projektive Kontaktmannigfaltigkeit mit mehr als einer Kontaktstruktur. Dann ist  $X \cong \mathbb{P}_{2n+1}$  oder  $X \cong \mathbb{P}(T_Y)$ .*

Die Vermutung 5.4.6 wird später in Kapitel 7.1 bewiesen werden.

## 5.5. Bekannte Resultate

Es gab in den letzten Jahren viele Arbeiten zu dem Klassifikationsproblem für Kontaktmannigfaltigkeiten. Eine der ersten Evidenzen für die Vermutung 5.1.4 ist das folgende Endlichkeitsresultat.

SATZ 5.5.1 (C. LeBrun und S. Salamon, [41]). *Für jede Zahl  $n$  gibt es – bis auf Isometrien und Skalierungen – nur endlich viele kompakte quaternion-Kählersche  $4n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten mit positiver skalarer Krümmung.*  $\square$

Die Frage, ob jede projektive Kontaktmannigfaltigkeit ein Twistorraum ist, fand ebenfalls eine erste Antwort.

SATZ 5.5.2 (C. LeBrun, [39]). *Eine kompakte komplexe Kontaktmannigfaltigkeit  $X$  ist genau dann ein Twistorraum, wenn  $X$  eine Kähler-Einstein Metrik besitzt.*  $\square$

Das für uns wesentlichste Ergebnis ist das folgende Resultat von J.P. Demailly, das mit analytischen Mitteln, insbesondere der Bochner-Technik, bewiesen wurde.

SATZ 5.5.3 (J.P. Demailly, [9]). *Es sei  $X$  eine Kählersche Kontaktmannigfaltigkeit. Dann ist  $L$  nicht pseudoeffektiv. Wenn  $X$  also eine projektive Kontaktmannigfaltigkeit ist, dann ist  $K_X$  nicht nef.*  $\square$

Weil  $K_X$  nicht nef ist, erlaubt uns Demaillys Resultat, Mori-Theorie und Moris Existenzsatz für rationale Kurven anzuwenden. Damit wurde ein Beweis der Vermutung 5.4.5 für Mannigfaltigkeiten mit  $b_2(X) > 1$  erbracht.

SATZ 5.5.4 (S. Kebekus, T. Peternell, A.J. Sommese, J.A. Wiśniewski, [34]). *Wenn  $X$  eine projektive Kontaktmannigfaltigkeit mit  $b_2(X) > 1$  ist, dann gibt es eine projektive Mannigfaltigkeit  $Y$ , so dass  $X$  isomorph zu  $\mathbb{P}(T_Y)$  ist.*  $\square$

Die Vermutung 5.4.5 wurde noch in einer Reihe von Spezialfällen bewiesen. Das wichtigste Resultat ist das Folgende.

SATZ 5.5.5 (A. Beauville, [3]). *Die Vermutung 5.4.5 ist richtig, wenn die beiden folgenden Bedingungen gelten:*

- *Das Geradenbündel  $L$  hat Schnitte und die rationale Abbildung  $\phi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L))$  ist generisch endlich.*
- *Die (Lie-)Gruppe der Automorphismen, die die Kontaktstruktur erhalten, ist reduktiv.*  $\square$

Die Annahme, dass  $\phi_L$  generisch endlich ist, ist im wesentlichen äquivalent zu der Annahme, dass die Kontaktmannigfaltigkeit quasi-homogen ist. Die Annahme, dass die Automorphismengruppe reduktiv ist, ist vom Standpunkt der Vermutung 5.1.4 nicht einschränkend: wenn  $X$  ein Twistorraum ist, dann ist nach [39] die Gruppe der Automorphismen, die die Kontaktstruktur erhalten, immer reduktiv. Eine Beweisstrategie für die Vermutung 5.1.4 ist deshalb zu zeigen, dass das lineare System  $|L|$  groß, oder zumindest nicht leer ist.

Die folgenden Resultate beruhen im Prinzip auf bekannten Klassifikationen. Eine Verallgemeinerung scheint deshalb schwierig.

SATZ 5.5.6 (S. Druel und Y.G. Ye, [10], [11], [49]). *Die Vermutung 5.4.5 gilt, wenn  $\dim X < 5$  ist oder wenn  $X$  torisch ist.*  $\square$

## Geraden auf Kontaktmannigfaltigkeiten

Es sei  $X$  eine projektive Kontaktmannigfaltigkeit der Dimension  $2n + 1$ . In dieser Situation zeigt Demaillys Satz 5.5.3, dass das kanonische Bündel  $K_X$  nicht nef ist und Moris Existenzsatz 1.1.1 für rationale Kurven liefert die Existenz einer irreduziblen Komponente  $H \subset \text{RatCurves}^n(X)$ , so dass für alle Kurven  $\ell \subset X$ , die zu einem Punkt in  $H$  gehören, die folgende Schnitzzahlbedingung gilt

$$1 \leq -K_X \cdot \ell \leq \dim X + 1 = 2n + 2.$$

Diese Kurven möchten wir im vorliegenden Kapitel studieren. Wir zeigen unter anderem direkt, dass alle minimalen rationalen Kurven, die einen allgemeinen Punkt  $x$  enthalten, glatt sind. Weiter werden wir zeigen, dass der Ort  $\text{locus}(H_x)$  dieser Kurven Legendresch ist.

### 6.1. Die Existenz von Kontaktgeraden

Wir hatten in der Bemerkung 5.3.1 gesehen, dass  $-K_X = (n + 1)L$  ist. Es folgt, dass  $L \cdot \ell$  entweder 1 oder 2 sein muss.

Wenn  $L \cdot \ell = 2$  ist, dann zeigt die Riemann-Roch-Abschätzung aus Abschnitt 1.2.2 für die Dimension des Hom-Schemas, dass

$$\dim \text{Hom}_{\text{bir}}(\mathbb{P}_1, X, [0 : 1] \mapsto x) \geq -K_X \cdot \ell = \dim X + 1$$

ist. Nun gibt es eine 2-dimensionale Gruppe von Automorphismen des  $\mathbb{P}_1$ , die den Punkt  $x$  fixieren. Deshalb impliziert die Annahme  $L \cdot \ell = 2$ , dass  $\dim H_x \geq \dim X - 1$  ist. Jetzt gibt es wieder zwei Möglichkeiten.

- Wenn die Unterfamilie  $H_x$  für eine generische Wahl eines Punkte  $x$  kompakt ist, folgt aus Moris Bend-and-Break, dass dann

$$\dim \text{locus}(H_x) = \dim U_x = \dim H_x + 1 = \dim X$$

ist<sup>1</sup>. Es folgt, dass  $\text{locus}(H_x) = X$  ist. Wir können also die Charakterisierung des projektiven Raumes aus Satz 3.4.1 anwenden und erhalten, dass  $X$  isomorph zu  $\mathbb{P}_{2n+1}$  ist.

- Wenn die Familie  $H_x$  für einen generischen Punkt  $x \in X$  nicht kompakt ist, dann gibt es nach dem Kompaktheitskriterium aus Satz 1.3.6 eine Familie  $H' \subset \text{RatCurves}^n(X)$ , die Kurven  $\ell$  parametrisiert, für die  $L \cdot \ell = 1$  ist.

Weil die Kurven, die  $L$  mit Multiplizität 1 schneiden, im Rest der Arbeit sehr wichtig sein werden, legen wir die folgende Notation fest.

---

<sup>1</sup>Wir verwenden in diesem Kapitel die Notationen  $\pi_x : U_x \rightarrow H_x$ ,  $\iota_x : U_x \rightarrow \text{locus}(H_x)$ , etc. wie im Abschnitt 1.3 ab Seite 7.

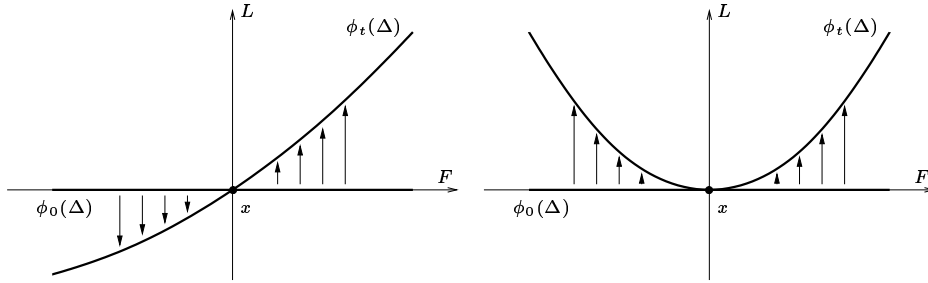


ABBILDUNG 6.2.1. Deformationen von  $F$ -integralen Kurven

DEFINITION 6.1.1. Wir nennen eine rationale Kurve  $\ell \subset X$  mit  $L.\ell = 1$  eine “Kontaktgerade in  $X$ ”.

BEMERKUNG 6.1.2. Der Begriff “Gerade” ist aus zwei Gründen vielleicht etwas verwirrend. Zum einen bemerken wir ausdrücklich, dass wir *nicht* annehmen, dass  $X$  prim ist. Wir nehmen also nicht an, dass es eine Einbettung  $i : X \rightarrow \mathbb{P}_k$  gibt, so dass  $L = i^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k}(1))$  ist. Insbesondere setzen wir nicht voraus an, dass Kontaktgeraden glatt sind.

Zum anderen sind die Geraden im projektiven Raum *keine* Kontaktgeraden. Das Geradenbündel  $L$ , das zu der Kontaktstruktur aus Beispiel 5.4.2 gehört, ist nämlich isomorph zu  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{2n+1}}(2)$  und schneidet die Geraden deshalb mit Multiplizität 2.

Weil der Fall  $X \cong \mathbb{P}_{2n+1}$  für uns nicht sehr interessant ist, wird diese Möglichkeit hier und in dem folgenden Kapitel 7 ausgeschlossen.

ANNAHMEN 6.1.3. *Es sei  $X$  eine projektive Kontaktmannigfaltigkeit der Dimension  $2n + 1$  und  $H \subset \text{RatCurves}^n(X)$  eine irreduzible Komponente, die Kontaktgeraden parametrisiert.*

BEMERKUNG 6.1.4. Weil  $H$  eine Familie von Kontaktgeraden ist, ist  $H$  nach Satz 1.3.6 auf Seite 10 kompakt. Die Abschätzung für die Dimension des Parameterraums  $\text{Hom}(\mathbb{P}_1, X)$  zeigt, dass  $\dim \text{locus}(H_x) \geq n$  ist.

BEMERKUNG 6.1.5. Es sei  $f : \tilde{\ell} \rightarrow \ell$  die Normalisierungsabbildung. Weil  $\tilde{\ell} \cong \mathbb{P}_1$  und weil  $T_{\tilde{\ell}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2)$  ist, ist es klar, dass die Abbildung

$$f^*(\theta) : T_{\tilde{\ell}} \rightarrow f^*(L)$$

trivial sein muss. Es folgt, dass die Kurve  $\ell$  an allen glatten Punkten  $x \in \ell$  tangential zum Hyperebenenfeld  $F$  ist. Kontaktgeraden sind also  $F$ -integrale Untervarietäten von  $X$ .

## 6.2. Deformationen von $F$ -integralen Kurven

Um die Kontaktgeraden auf  $X$  zu studieren, untersuchen wir zunächst die Einschränkungen an die Deformationen von Kontaktgeraden, die sich daraus ergeben, dass alle Kontaktgeraden  $F$ -integral sind. Die wesentliche Idee dabei ist in den Abbildungen 6.2.1 illustriert. In diesen Abbildungen ist jeweils ein Punkt  $x$  markiert und der Tangentialraum  $T_X|_x$



in den  $F$ -Anteil und in einen komplementären  $L$ -Anteil zerlegt. Die Kurve  $\phi_0(\Delta)$  bezeichne eine  $F$ -integrale Kreisscheibe, die deformiert werden soll. Der  $L$ -Anteil des Vektorfeldes in  $H^0(\phi_0(\Delta), L|_{\phi_0(\Delta)})$ , das zu den Deformationen gehört, ist durch Pfeile eingezeichnet. Im linken Bild hat der Tangentialraum  $T_{\phi_t(\Delta)}|_x$  einen nicht-verschwindenden  $L$ -Anteil. Die deformierte Kurve  $\phi_t(\Delta)$  ist also nicht  $F$ -integral. Der  $L$ -Anteil des zugehörigen Vektorfeldes hat eine einfache Nullstelle. Im rechten Bild soll die deformierte Kurve  $\phi_t(\Delta)$  wieder  $F$ -integral sein. Der  $L$ -Anteil des zugehörigen Vektorfeldes hat in dieser Situation eine doppelte Nullstelle. Die Abbildung legt daher den Schluss nahe, dass die Schnitte der Einschränkung von  $L|_{\phi_0(\Delta)}$ , die wir durch Deformationen innerhalb einer Familie von  $F$ -integralen Kurven erhalten, stets mit höherer Multiplizität verschwinden müssen.

In dem folgenden Lemma wird dieser Sachverhalt präzise formuliert.

LEMMA 6.2.1 (Deformation von  $F$ -integralen Kurven). *Es sei  $\Phi_t : \Delta_C \rightarrow X$  eine Familie von Kreisscheiben, die wir wie folgt schreiben*

$$\begin{aligned} \Phi : \Delta_{\mathcal{H}} \times \Delta_C &\rightarrow X \\ (t, z) &\mapsto \Phi_t(z) \end{aligned}$$

wobei  $\Delta_{\mathcal{H}}$  und  $\Delta_C$  Einheitskreisscheiben sind. Wir nehmen an, dass für alle  $t \in \Delta_{\mathcal{H}}$  das Bild  $\Phi_t(\Delta_C)$   $F$ -integral ist, dass also  $\Phi_0^*(\theta)(\frac{\partial}{\partial z}) \equiv 0$  ist. Falls dann der Schnitt

$$\sigma := \Phi_0^*(\theta) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \in H^0(\Delta_C, \Phi_0^*(L))$$

bei  $0 \in \Delta_C$  verschwindet, aber nicht identisch verschwindet, dann verschwindet  $\sigma$  bei 0 mit Multiplizität mindestens zwei genau dann, wenn

$$(6.2.1) \quad \phi_0^*(N) \left( \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(0,0)}, \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{(0,0)} \right) = 0$$

gilt, wobei  $N$  der nicht-entartete O'Neill-Tensor ist.

BEWEIS. Wir wählen lokale Bündelkoordinaten für  $\Phi^*(L)$  und wenden die Formel (5.2.2) von Seite 52 an, die die Ableitung von  $\theta$  mit der Lie-Klammer verbindet. Wenn wir beachten, dass  $d\Phi^*(\theta) = \Phi^*(d\theta)$  ist und wenn  $\vec{X}_0$  und  $\vec{X}_1$  Vektorfelder auf  $\Delta_{\mathcal{H}} \times \Delta_C$  sind, dann liefert der Rückzug von (5.2.2) die Gleichung

$$(6.2.2) \quad \Phi^*(d\theta)(\vec{X}_0, \vec{X}_1) = \vec{X}_0(\Phi^*(\theta)(\vec{X}_1)) - \vec{X}_1(\Phi^*(\theta)(\vec{X}_0)) - \Phi^*(\theta)([\vec{X}_0, \vec{X}_1]).$$

Wir betrachten jetzt den Spezialfall, wo  $\vec{X}_0 = \frac{\partial}{\partial z}$  und  $\vec{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t}$  ist. Weil  $\frac{\partial}{\partial z}$  und  $\frac{\partial}{\partial t}$  kommutieren und weil außerdem  $\Phi^*(\theta)(\frac{\partial}{\partial z}) \equiv 0$  ist, erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi^*(\theta) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \Phi^*(d\theta) \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Man werte die Gleichung bei  $t = 0$  und  $z = 0$  aus. Die Gleichung (5.2.3) von Seite 52 liefert den Zusammenhang zwischen  $d\theta$  und dem O'Neill-Tensor  $N$ .  $\square$

Das Lemma 6.2.1 lässt sich besonders gut für Familien von Kontaktgeraden  $\ell$  anwenden, weil ein nicht-verschwindender Schnitt der Einschränkung  $L|_{\ell}$  höchstens eine einfache Nullstelle besitzen darf.

**PROPOSITION 6.2.2** (Deformationen von Kontaktgeraden). *Es sei  $U_{\mathcal{H}} \subset (\text{Hom}_{bir}(\mathbb{P}_1, X))_{\text{red}}$  eine glatte analytische Familie von Morphismen<sup>2</sup>, die Kontaktgeraden parametrisieren. Wir nehmen an, dass es einen Punkt  $c \in \mathbb{P}_1$  gibt, so dass für alle Morphismen  $f \in \mathcal{H}$  und alle Paare  $(\vec{v}, \sigma)$  von Tangentialvektoren  $\vec{v} \in T_{\mathbb{P}_1}|_c$  und  $\sigma \in T_{\mathcal{H}}|_f \subset H^0(\mathbb{P}_1, f^*(T_X))$  der Tangentialvektor  $\sigma(c)$  in  $f^*(F)|_c$  liegt.*

*Dann ist  $\sigma$  genau dann in  $H^0(\mathbb{P}_1, f^*(F))$  enthalten, wenn die Tangentialvektoren  $\vec{v}$  und  $\sigma(c)$  orthogonal bezüglich des zurückgezogenen O'Neill-Tensors  $f^*(N)$  sind.*

Wir paraphrasieren die Aussage der Proposition 6.2.2 etwas unpräzise in einfacheren Worten: wenn in einer Deformationsfamilie von punktierten Kontaktgeraden der ausgezeichnete Punkt stets nur in  $F$ -Richtung bewegt werden kann, und wenn diese Richtungen auch noch orthogonal zum Tangentialraum der jeweiligen Kontaktgerade sind, dann ist der Ort der so parametrisierten Geraden automatisch  $F$ -integral.

**BEWEIS DER PROPOSITION 6.2.2.** Weil  $U_{\mathcal{H}}$  nach Annahme an der Stelle  $f$  glatt ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $U_{\mathcal{H}}$  eine in  $(\text{Hom}_{bir}(\mathbb{P}_1, X))_{\text{red}}$  eingebettete Kreisscheibe  $\Delta_{\mathcal{H}}$  ist. Die Annahme über  $\sigma(c)$  impliziert, dass der Schnitt

$$\sigma' := f^*(\theta)(\sigma) \in H^0(\mathbb{P}_1, f^*(L))$$

bei  $c$  eine Nullstelle hat. Falls  $\sigma'$  nicht identisch verschwindet, muss diese Nullstelle nach Lemma 6.2.1 mindestens die Ordnung zwei haben. Das ist aber nicht möglich, weil  $f^*(L)$  ein Geradenbündel vom Grad eins ist.  $\square$

**BEMERKUNG 6.2.3.** Wenn die Voraussetzungen der Proposition 6.2.2 erfüllt sind, dann folgt unmittelbar aus [36, prop. II.3.4], dass das Bild der Tangentialabbildung des universellen Morphismus

$$T\mu : T_{U_{\mathcal{H}} \times \mathbb{P}_1} \rightarrow T_X$$

in  $F \subset T_X$  liegt.

Wenn  $x \in X$  ein allgemeiner Punkt ist und wenn  $f \in \text{Hom}_{bir}(\mathbb{P}_1, X, [0 : 1] \mapsto x)$  ist, dann ist jeder Schnitt  $\sigma \in H^0(\mathbb{P}_1, f^*(T_X))$  automatisch ein Tangentialvektor an eine glatte analytische Familie von Deformationen. Wir erhalten deshalb für allgemeine Punkte  $x$  ein starkes Kriterium dafür, dass der Schnitt  $\sigma$  bereits in  $H^0(\mathbb{P}_1, f^*(F))$  liegt.

**KOROLLAR 6.2.4** (Schnitte in  $f^*(T_X)$ ). *Es sei  $x \in X$  ein allgemeiner Punkt,  $f \in \text{Hom}_{bir}(\mathbb{P}_1, X, [0 : 1] \mapsto x)$  ein Morphismus und  $\sigma \in H^0(\mathbb{P}_1, f^*(T_X))$  ein Schnitt, so dass  $\sigma([0 : 1]) \in f^*(F)$  ist.*

*Dann ist  $\sigma$  genau dann in  $H^0(\mathbb{P}_1, f^*(F))$  enthalten, wenn  $T_{\mathbb{P}_1}$  und  $\sigma([0 : 1])$  orthogonal bezüglich des zurückgezogenen O'Neill-Tensors  $f^*(N)$  sind.*

**BEWEIS.** Wir beachten, dass  $\text{Hom}_{bir}(\mathbb{P}_1, X)$  nach den Ausführungen des Abschnittes 1.3.3 an der Stelle  $f$  glatt ist. Konsequenz: wir finden eine eingebettete Kreisscheibe  $\Delta_{\mathcal{H}} \subset \text{Hom}_{bir}(\mathbb{P}_1, X)$ , die um  $f$  zentriert ist, so dass  $\sigma \subset T_{\Delta_{\mathcal{H}}}|_f$  ist. In dieser Situation können wir die Proposition 6.2.2 auf die Familie  $\Delta_{\mathcal{H}}$  anwenden und erhalten die gewünschte Aussage.  $\square$

<sup>2</sup>Unter einer glatten analytischen Familie verstehen wir hier einfach eine analytische Untermannigfaltigkeit von  $(\text{Hom}_{bir}(\mathbb{P}_1, X))_{\text{red}}$ . In den Anwendungen wird  $U_{\mathcal{H}}$  häufig eine eingebettete Kreisscheibe sein.

### 6.3. Die Dimension von $\text{locus}(H_x)$

Für ein besseres Verständnis der Kontaktmannigfaltigkeiten ist der Ort von Kontaktgeraden durch einen festen Punkt von großen Interesse. Die folgende Proposition gibt eine erste Beschreibung dieses Ortes, die wir im Abschnitt 7.3 weiter verbessern werden. Das Resultat wurde schon in der Arbeit [34] gezeigt. Wir bevorzugen aber einen kurzen Beweis mit den hier entwickelten Methoden. Tatsächlich ist die folgende Proposition eine einfache Anwendung der Proposition 6.2.2 in dem trivialen Fall, dass der markierte Punkt überhaupt nicht bewegt wird.

**PROPOSITION 6.3.1** ([34, prop. 2.9]). *Wenn  $x \in X$  irgendein Punkt ist (nicht notwendigerweise allgemein) und wenn  $H_x$  nicht leer ist, dann ist  $\text{locus}(H_x)$  eine Legendresche Untervarietät von  $X$ .*

**BEWEIS.** Die Riemann-Roch Abschätzung für die Dimension des Ortes  $\text{locus}(H_x)$  liefert in unserer Situation die Ungleichung  $\dim \text{locus}(H_x) \geq n$ . Um also zu zeigen, dass  $\text{locus}(H_x)$  eine Legendresche Untervarietät ist, genügt es, einzusehen, dass der Ort  $\text{locus}(H_x)$  dort  $F$ -integral ist, wo er glatt ist.

Es sei also  $y \in \text{locus}(H_x)$  ein allgemeiner (glatter) Punkt und  $\mathcal{H} \subset \text{Hom}_{\text{bir}}(\mathbb{P}_1, X, [0 : 1] \mapsto x)$  eine Komponente, die Kontaktgeraden aus  $H_x$  parametrisiert. Weil der Tangentialraum  $T_{\text{locus}(H_x)}|_y$  im Bild der Tangentialabbildung  $T\mu$  enthalten ist, genügt es nach Bemerkung 6.2.3, zu zeigen, dass die Familie  $\mathcal{H}$  den Bedingungen der Proposition 6.2.2 genügt. Das ist aber trivialerweise der Fall, wenn wir  $c := [0 : 1]$  setzen, da der Tangentialvektor

$$Tf(\sigma([0 : 1])) = 0 \in T_X|_x$$

sowohl in  $F|_x$  liegt als auch zu jedem anderen Vektor  $\vec{v} \in F|_x$  orthogonal ist.  $\square$

Als Korollar zur Proposition 6.3.1 erhalten wir, dass es durch jeden Punkt von  $x$  eine Kontaktgerade gibt.

**KOROLLAR 6.3.2.** *Es sei  $x \in X$  ein beliebiger Punkt. Dann ist  $H_x$  nicht leer.*

**BEWEIS.** Die Riemann-Roch-Abschätzung (1.2.1) von Seite 6 liefert, dass

$$\dim H \geq 3n$$

ist. Die Dimension der universellen Familie  $U \subset \text{Univ}^c(X)$  ist also größer oder gleich  $3n+1$ . Weil die Fasern des Auswertungsmorphismus  $\iota : U \rightarrow X$  aber nach Proposition 6.3.1 die konstante Dimension  $n$  haben, ist dies nur dann möglich, wenn  $\iota$  surjektiv ist.  $\square$

### 6.4. Die Regularität der Kontaktgeraden

Als nächsten Schritt zeigen wir, dass die allermeisten Kontaktgeraden auf  $X$  glatt sind. Dies verbessert den Satz 3.1.1 für Kontaktmannigfaltigkeiten. Weil das Beweisprinzip von Proposition 6.4.1 im Folgenden immer wieder verwendet wird, stellen wir die wesentliche Argumentationslinie hier klar heraus.

Wir möchten einen Widerspruchsbeweis führen und konstruieren zu diesem Zweck eine (nicht notwendigerweise abgeschlossene) Unterfamilie  $U_{\mathcal{H}} \subset \text{Hom}_{\text{bir}}(\mathbb{P}_1, X)$ , die die folgenden widersprüchlichen Eigenschaften hat:

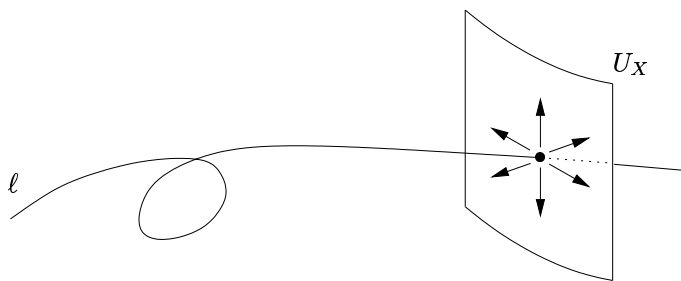


ABBILDUNG 6.4.1. Zum Beweis der Proposition 6.4.1

- Zum einen wird sich aus der Konstruktion ergeben, dass der Ort der zu  $U_{\mathcal{H}}$  gehörenden Kontaktgeraden  $F$ -integral ist, weil die  $L$ -Anteile von Vektorfeldern, die wir durch Deformationen erhalten, stets verschwinden.
- Zum anderen hat der Ort dieser Kurven mindestens die Dimension  $n + 1$ . Das aber ist nach der Dimensionsaussage aus Frobenius Satz 5.3.2 unmöglich.

Die erste Anwendung dieses Beweisprinzips finden wir in der folgenden Proposition.

**PROPOSITION 6.4.1.** *Wenn  $x \in X$  ein allgemeiner Punkt ist und  $\ell$  eine Kontaktgerade, die  $x$  enthält, dann ist  $\ell$  glatt.*

**BEWEIS.** Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass die Behauptung falsch ist. Man nehme also an, dass es für einen allgemeinen Punkt  $x \in X$  eine singuläre Kontaktgerade  $\ell$  gibt, die  $x$  enthält. Erinnerung: die singuläre rationale Kurve  $\ell$  kann immer durch eine integrale singuläre ebene Kubik dominiert werden, also durch eine rationale Kurve mit einer einzigen nodalen oder kuspidalen Singularität. Wir werden einen Widerspruch erreichen, indem wir einen Schnitt im Rückzug von  $L$  auf der ebenen Kubik konstruieren, der auf einem vorgegeben, allgemein gewählten, Punkt verschwindet. Die Konstruktion dieses Schnittes wird durch eine Deformation der singulären Kurve erfolgen.

Weil  $x$  allgemein gewählt war, existiert eine singuläre (nodale oder kuspide) ebene Kubik  $C \subset \mathbb{P}_2$  und eine irreduzible (nicht notwendigerweise kompakte) Komponente  $\mathcal{H} \subset \text{Hom}_{\text{bir}}(C, X)$ , so dass der universelle Morphismus  $\mu : \mathcal{H} \times C \rightarrow X$  dominant ist und so, dass für alle  $f \in \mathcal{H}$  gilt:  $\deg f^*(L) = 1$ .

Jetzt wählen wir einen generischen Morphismus  $f \in \mathcal{H}$  und beachten, dass es eine offene Menge  $U \subset C$  gibt, so dass für alle  $c \in U$  die Tangentialabbildung des eingeschränkten Morphismus  $\mu_c := \mu|_{\mathcal{H} \times \{c\}} : \mathcal{H} \rightarrow X$  bei  $f$  maximalen Rang hat:

$$\text{rank}_{[f]} T\mu_c = \dim X = 2n + 1.$$

Wir erinnern uns an die Lemmata 2.1.3 und 2.1.4 von Seite 16, die zeigen, dass die glatten Punkte von  $C$  in 1:1-Korrespondenz mit den Geradenbündeln vom Grad 1 stehen und wählen einen Punkt  $c \in U$ , so dass  $\mathcal{O}_C(c) \not\cong f^*(L)$  ist. Mit anderen Worten wählen wir einen Punkt  $c \in U$ , der nicht oskulierend bezüglich des Geradenbündels  $f^*(L)$  ist.

Als nächsten Schritt wählen wir eine Legendresche, nicht notwendigerweise kompakte, Untermannigfaltigkeit von  $U_X \subset X$ , die  $x$  enthält und bei  $x$  transversal zu  $f(C)$  steht. Wir wissen aus dem Satz von Darboux, dass  $X$  lokal immer die Gestalt von Beispiel 5.4.1

hat, so dass es viele solcher Untermannigfaltigkeiten gibt. Weil  $\mu_c$  maximalen Rang hat, können wir einen Schnitt  $U_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$  über  $U_X$  wählen, also eine Untermannigfaltigkeit  $U_{\mathcal{H}}$ , so dass  $\mu_c|_{U_{\mathcal{H}}} : U_{\mathcal{H}} \rightarrow U_X$  ein Isomorphismus ist. Nach Konstruktion hat  $\mu(U_{\mathcal{H}} \times C)$  die Dimension  $n + 1$  und kann deshalb nicht Legendresch sein. Es folgt deshalb, dass es eine eingebettete Kreisscheibe  $\Delta_{\mathcal{H}} \subset U_{\mathcal{H}}$  gibt und eine Koordinate  $t$  auf  $\Delta_{\mathcal{H}}$ , die um  $f = \{t = 0\}$  zentriert ist, so dass

$$\sigma := f^*(\theta) \left( \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) \in H^0(C, f^*(L)) \setminus \{0\}$$

ist. Für die letzte Aussage erinnern wir uns daran, dass  $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}$  kanonisch mit einem Element in  $H^0(C, f^*(T_X))$  identifiziert ist. Nach Wahl von  $U_{\mathcal{H}}$  gilt automatisch, dass  $\sigma(c) = 0$  ist. Das ist aber nach der Wahl von  $c$  unmöglich, und wir haben einen Widerspruch konstruiert.  $\square$

**KOROLLAR 6.4.2.** *Das Urbild  $\iota_x^{-1}(x)$  ist eine Untervarietät  $\sigma_{\infty} \subset U_x$ , die jede Faser von  $\pi_x$  in genau einem Punkt schneidet<sup>3</sup>.*  $\square$

### 6.5. Der Auswertungsmorphismus $\iota_x$ und die Tangentialabbildung $\tau_x$

Wir werden in diesem Abschnitt die Tangentialabbildung  $\tau_x$ , die wir im Kapitel 3.2 definiert haben, ausführlicher studieren. Ein Satz, der Grothendieck zugeschrieben wird, aber wahrscheinlich älter ist, zeigt, dass alle Vektorbündel über  $\mathbb{P}_1$  in eine direkte Summe von Geradenbündel aufspalten. Wir untersuchen hier den Spaltungstyp der Einschränkung  $T_X|_{\ell}$ , weil diese Spaltung Informationen über den Deformationsraum liefert. Das folgende Lemma zeigt, dass die Deformationen von Kontaktgeraden in einem sehr starken Sinne unobstruiert sind. Rationale Kurven, für die das Tangentialbündel wie in (6.5.1) zerfällt, nennt man ‘‘Standardkurven’’. Diese Kurven spielen in vielen Arbeiten beim Studium der Tangentialabbildung eine wesentliche Rolle.

**LEMMA 6.5.1.** *Wenn  $x \in X$  ein allgemeiner Punkt ist und wenn  $\ell$  eine Kontaktgerade ist, die  $x$  enthält, dann zerfällt die Einschränkung  $T_X|_{\ell}$  wie folgt.*

$$(6.5.1) \quad T_X|_{\ell} \cong \mathcal{O}_{\ell}(2) \oplus \mathcal{O}_{\ell}(1)^{\oplus n-1} \oplus \mathcal{O}_{\ell}^{\oplus n+1}$$

**BEWEIS.** Es folgt direkt aus der Definition 5.2.1 der Kontaktstruktur, dass  $F \cong F^* \otimes L$  ist. Weil aber  $L|_{\ell} \cong \mathcal{O}_{\ell}(1)$  ist, und weil Vektorbündel über  $\mathbb{P}_1$  immer in direkte Summen von Geradenbündeln zerfallen, können wir schreiben

$$F|_{\ell} \cong \bigoplus_{i=1}^n (\mathcal{O}_{\ell}(a_i) \oplus \mathcal{O}_{\ell}(1 - a_i)),$$

wobei  $a_i > 0$ . Es folgt, dass die Zerlegung von  $F|_{\ell}$  genau  $n$  positive Einträge enthält. Dies wiederum zeigt, dass die Zerlegung von  $T_X|_{\ell}$  mindestens  $n$  positive Einträge hat. Um die Argumentation zu beenden, beachten wir, dass  $T_X|_{\ell}$  nach [37, prop. 1.1] nef ist und dass  $c_1(T_X|_{\ell}) = -K_X \cdot \ell = n + 1$  ist.  $\square$

<sup>3</sup>Wir vermeiden die Bezeichnung ‘‘Schnitt’’, weil a priori nicht klar ist, dass  $H_x$  normal ist. Damit sind  $\sigma_{\infty}$  und  $H_x$  nicht notwendigerweise isomorph.

Als Korollar zu dem vorhergehenden Lemma erhalten wir, dass sowohl der Auswertungsmorphismus  $\iota_x : U_x \rightarrow X$  als auch die Tangentialabbildung  $\tau_x : \tilde{H}_x \rightarrow \mathbb{P}(T_X^*|_x)$  immersiv sind. Weil alle Kontaktgeraden  $F$ -integral sind, ist das Bild der Tangentialabbildung automatisch in  $\mathbb{P}(F^*|_x)$  enthalten.

**KOROLLAR 6.5.2.** *Wenn  $x \in X$  ein allgemeiner Punkt ist, dann gilt*

- (1) *Die Untervarietät  $H_x \subset H$  ist glatt.*
- (2) *Der universelle Morphismus  $\iota_x : U_x \rightarrow \text{locus}(H_x) \subset X$  ist außerhalb eines Schnittes  $\sigma_\infty$ , der zu  $x$  kontrahiert wird, eine Immersion, die  $U_x$  birational auf das Bild abbildet.*
- (3) *Die Tangentialabbildung  $\tau_x : \tilde{H}_x \rightarrow \mathbb{P}(F^*|_x)$  ist ebenfalls eine Immersion.*

**BEWEIS.** Wir betrachten das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{\iota}_x & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 \tilde{U}_x & \xrightarrow[\text{Normalisierung}]{\eta_U} & U_x & \xrightarrow{\iota_x} & \text{locus}(H_x) \\
 \downarrow \tilde{\pi}_x & & \downarrow \pi_x & & \\
 \tilde{H}_x & \xrightarrow[\text{Normalisierung}]{\eta_H} & H_x & & \\
 \downarrow \tau_x & & & & \\
 \mathbb{P}(F^*|_x) & & & & 
 \end{array}$$

$\tilde{U}_x$  und  $U_x$  sind  $\mathbb{P}_1$ -Bündel über  $\tilde{H}_x$  und  $H_x$  bzw.  $\mathbb{P}(F^*|_x)$ .

Nach dem Glattheitssatz, Proposition 1.3.5 ist die Varietät  $\tilde{H}_x$  glatt. Also ist auch  $\tilde{U}_x$  glatt, und es macht überhaupt erst Sinn, davon zu sprechen, dass  $\tilde{\iota}_x|_{\tilde{U}_x \setminus \sigma_\infty}$  immersiv ist. Die Tatsache, dass  $\tilde{\iota}_x|_{\tilde{U}_x \setminus \sigma_\infty}$  und  $\tau_x$  immersiv sind, folgt für Standardkurven aus [36, props. II.3.4 und II.3.10]. Die Birationalität von  $\iota_x$  wurde im Satz 3.3.1 bewiesen. Es bleibt also noch, zu zeigen, dass  $H_x$  glatt ist.

Zu diesem Zweck erinnern wir an das Korollar 1.3.4: weil alle Kurven  $\ell \in H_x$  glatt sind, ist die Normalisierungsabbildung  $\eta_H$  bijektiv. Weil  $\tilde{U}_x$  und  $U_x$  aber  $\mathbb{P}_1$ -Bündel sind, muss auch die Normalisierung  $\eta_U$  bijektiv sein.

Konsequenz: die Einschränkung  $\eta_H|_{\tilde{U}_x \setminus \sigma_\infty}$  ist bijektiv und immersiv, also ein Isomorphismus. Also ist  $U_x \setminus \eta_U(\sigma_\infty)$  glatt. Weil  $U_x$  aber ein  $\mathbb{P}_1$ -Bündel über  $H_x$  ist, muss dann auch  $H_x$  glatt sein.  $\square$

## Kontaktmannigfaltigkeiten mit $b_2(X) = 1$

In diesem Kapitel ist  $X$  eine projektive Kontaktmannigfaltigkeit mit  $b_2(X) = 1$ . Im Hinblick auf den Satz 5.5.4 ist dieser Fall ohnehin der Interessanteste. Die Methoden des vorangegangenen Kapitels lassen sich für Mannigfaltigkeiten mit  $b_2 = 1$  besonders gut anwenden.

Das Ziel in diesem Kapitel ist es, C. LeBruns Eindeutigkeitsvermutung 5.4.6 zu beweisen und durch Ausnutzung der speziellen Geometrie von Kontaktmannigfaltigkeiten den Satz 3.2.1 über die Tangentialabbildung  $\tau_x$  zu verbessern: wir werden zeigen, dass die Tangentialabbildung nicht nur endlich, sondern sogar generisch injektiv ist – vergleiche die in der Einleitung aufgeworfene Frage (4). Schließlich werden wir eine genauere Beschreibung des Ortes  $\text{locus}(H_x)$  geben. Diese Beschreibung kann als zusätzliche Evidenz für die Vermutung 5.4.5 gesehen werden.

Wir schließen den Fall  $X \cong \mathbb{P}_{2n+1}$  nach wie vor aus und verwenden weiterhin die Annahmen 6.1.3.

### 7.1. Eindeutigkeit von Kontaktstrukturen

Wenn  $x \in X$  ein allgemeiner Punkt ist, dann werden wir zeigen, dass die Kontakt-Distribution  $F|_x$  durch die Tangentialräume an Geraden durch  $x$  erzeugt ist. Mit anderen Worten werden wir zeigen, dass das Bild der Tangentialabbildung

$$\tau_x : \tilde{H}_x \rightarrow \mathbb{P}(F^*|_x)$$

nicht linear entartet ist. Als unmittelbares Korollar ergibt sich, dass das Hyperebenenfeld  $F$  aus den Geraden rekonstruiert werden kann und also kanonisch vorgegeben ist. In dem Beweis werden wir die Deformationen von  $\text{locus}(H_x)$  untersuchen, die entstehen, wenn man den Basispunkt  $x$  bewegt. Dazu ist es sinnvoll, die folgende Notation einzuführen.

NOTATION 7.1.1. Betrachte die Inzidenzvarietät

$$V := \{(x', x'') \in X \times X \mid x'' \in \text{locus}(H_{x'})\}.$$

Eine elementare Rechnung zeigt, dass  $V$  eine abgeschlossene Untervarietät von  $X \times X$  ist. Wir nennen  $V$  die ‘‘Inzidenzvarietät der Geraden durch feste Punkte’’.

Wir bezeichnen die kanonischen Projektionen mit  $\pi_1, \pi_2 : V \rightarrow X$ . Dann gilt für jeden Punkt  $x \in X$  die (mengentheoretische) Gleichung

$$\pi_2(\pi_1^{-1}(x)) = \text{locus}(H_x).$$

Es kann natürlich vorkommen, dass das schementheoretische Urbild  $\pi_1^{-1}(x)$  für spezielle Punkte  $x \in X$  nicht reduziert ist.

Wenn  $Y \subset X$  eine Teilmenge ist, werden wir die Einschränkung  $\pi_1^{-1}(Y)$  häufig mit  $V|_Y$  bezeichnen.

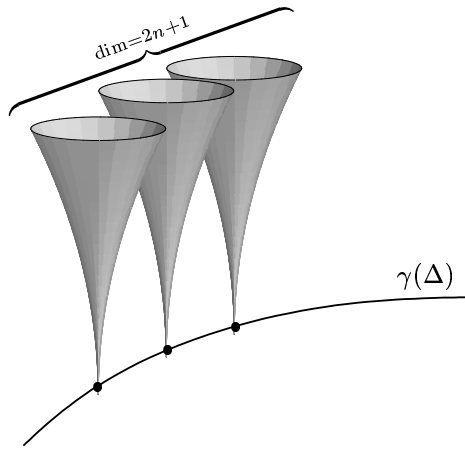


ABBILDUNG 7.1.1. Deformation von  $\text{locus}(H_x)$

Das folgende Lemma zeigt, dass sich der Ort  $\text{locus}(H_x)$  tatsächlich bewegt, wenn wir den Basispunkt bewegen. Die Aussage ist in der Abbildung 7.1.1 illustriert.

LEMMA 7.1.2. *Es sei  $\Delta$  eine Einheitskreisscheibe mit Koordinate  $t$  und  $\gamma : \Delta \rightarrow X$  eine Einbettung. Dann existiert eine offene Menge  $V^0 \subset V|_{\gamma(\Delta)}$ , so dass  $\pi_2(V^0)$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension*

$$\dim \pi_2(V^0) = n + 1$$

ist. Der Satz von Frobenius zeigt insbesondere, dass  $\pi_2(V^0)$  nicht  $F$ -integral ist.

BEWEIS. Wir haben in Proposition 6.3.1 gesehen, dass die Abbildung  $\pi_1|_V$  äquidimensional von relativer Dimension  $n$  ist. Damit ist  $V$  eine wohldefinierte Familie von algebraischen Zykeln im Sinne von [36, I.3.10] und die universelle Eigenschaft der Chow-Konstruktion liefert einen Morphismus  $\phi : X \rightarrow \text{Chow}(X)$  in die Chow-Varietät von  $X$ , so dass  $V$  der Rückzug der universellen Familie über  $\text{Chow}(X)$  ist. Weil nun  $\dim \text{locus}(H_x) = n < \dim X$  ist, ist es klar, dass das Bild von  $\phi$  nicht ein einzelner Punkt ist. Indem wir die Annahme  $b_2(X) = 1$  benutzen, erhalten wir, dass die Abbildung  $\phi$  endlich ist. Da zwei reduzierte algebraische Zykeln aber genau dann gleich sind, wenn die Träger übereinstimmen, bedeutet dies, dass für einen gegebenen allgemeinen Punkt  $x_0 \in X$  höchstens endlich viele Punkte  $(x_i)_{i=1 \dots k}$  existieren für die

$$\text{locus}(H_{x_0}) = \text{locus}(H_{x_i})$$

gilt. Es gibt also eine offene Menge, wo die Tangentialabbildung  $T\pi_2$  den maximalen Rang  $n + 1$  hat. Wenn  $V^0 \subset V|_{\gamma(\Delta)}$  eine offene Menge ist, auf der  $\pi_2|_{V^0}$  eine Einbettung ist, dann hat  $\pi_2(V^0)$  die Dimension  $n + 1$ . Die Behauptung folgt.  $\square$

SATZ 7.1.3. *Wenn  $x \in X$  ein allgemeiner Punkt ist, dann ist  $F|_x$  vom Bild der Tangentialabbildung  $\tau_x$  aufgespannt.*

BEWEIS. Unser Argument involviert eine Analyse der Deformationen von  $\text{locus}(H_y)$ , die entstehen, wenn man den Basispunkt  $y$  variiert. Wir werden einen Widerspruchsbeweis



führen und annehmen, dass der Satz falsch ist. Unter dieser Annahme werden wir eine Familie von Morphismen  $\mathbb{P}_1 \rightarrow X$  konstruieren, die der Aussage der Proposition 6.2.2 widerspricht.

Als ersten Schritt konstruieren wir eine Abbildung  $\gamma$ , auf die das Lemma 7.1.2 angewendet werden kann. Wenn wir annehmen, dass die Aussage des Satzes falsch ist, können wir eine analytische offene Umgebung  $U = U(x) \subset X$  und ein Unterbündel  $F' \subset F|_U$  finden, so dass

- (1) für alle Punkte  $y \in U$  die Vektorräume  $F'|_y$  und  $\text{Span}(\text{Image } \tau_y) \subset F|_y$  bezüglich des nicht-degenerierten O'Neill-Tensors  $N : F \otimes F \rightarrow L$ , der mit der Kontaktstruktur kommt, orthogonal sind.
- (2) alle Geraden, die  $U$  schneiden, glatt sind.

Indem wir  $U$  nötigenfalls verkleinern, können wir annehmen, dass ein nirgendsverschwindendes Vektorfeld  $\vec{v} \in H^0(U, F')$  existiert. Wenn  $y \in U$  also irgendein Punkt ist und  $\ell$  eine Gerade, die  $y$  enthält, dann gilt automatisch

$$(7.1.1) \quad T_\ell|_y \perp \vec{v}(y),$$

wobei “ $\perp$ ” wieder bedeutet: orthogonal bezüglich des nicht-entarteten O'Neill-Tensors. Es sei  $\Delta$  eine Einheitskreisscheibe und mit Koordinate  $t$  und  $\gamma : \Delta \rightarrow X$  eine integrale Kurve von  $\vec{v}$  mit  $\gamma(0) = x$ .

Wir bezeichnen die Familie von Morphismen, die die Kurven von  $H$  parametrisieren mit  $\mathcal{H} \subset \text{Hom}_{bir}(\mathbb{P}_1, X)$ . Setze

$$\mathcal{H}_\Delta := \{f \in \mathcal{H} \mid f([0 : 1]) \in \gamma(\Delta)\}.$$

Wenn  $\mu_\Delta : \mathcal{H}_\Delta \times \mathbb{P}_1 \rightarrow X$  der universelle Morphismus ist, dann folgt direkt aus der Konstruktion, dass

$$\mu_\Delta(\mathcal{H}_\Delta \times \mathbb{P}_1) = \pi_2(V|_{\gamma(\Delta)}) \supset \gamma(\Delta)$$

ist. Weil  $\pi_2(V^0)$  nicht  $F$ -integral ist, existiert für einen allgemeinen Punkt  $(f, p) \in \mathcal{H}_\Delta \times \mathbb{P}_1$  ein Tangentialvektor  $\vec{w} \in T_{\mathcal{H}_\Delta \times \mathbb{P}_1}|_{(f,p)}$ , so dass das Bild der Tangentialabbildung nicht in  $F$  liegt:

$$T\mu_\Delta(\vec{w}) \notin F.$$

Wir zerlegen  $\vec{w} = \vec{w}' + \vec{w}''$ , wobei  $\vec{w}' \in T_{\mathbb{P}_1}|_p$  und  $\vec{w}'' \in T_{\mathcal{H}_\Delta}|_f$  ist. Weil  $f(\mathbb{P}_1)$  jetzt aber  $F$ -integral ist, folgt sofort, dass  $T\mu_\Delta(\vec{w}') \in F$  ist. Das wiederum liefert

$$(7.1.2) \quad T\mu_\Delta(\vec{w}'') \notin F.$$

Als nächsten Schritt wählen wir eine Familie von Morphismen

$$\begin{array}{ccc} \beta : & \Delta & \rightarrow \mathcal{H}_\Delta \\ & t & \mapsto \beta_t \end{array}$$

so, dass  $\beta_0 = f$  ist und so, dass

$$T\beta \left( \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \right) = \vec{w}''$$

ist. Weil  $\mathcal{H}$  nach den Bemerkungen aus Abschnitt 1.3.3 an der Stelle  $f$  glatt ist, ist dies immer möglich. Wenn  $\sigma \in H^0(\mathbb{P}_1, f^*(T_X))$  der Schnitt ist, der zu dem Tangentialvektor  $\vec{w}'' = T\beta(\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0})$  gehört, und wenn  $\sigma' := f^*(\theta)(\sigma) \in H^0(\mathbb{P}_1, f^*(L))$  ist, dann gilt das Folgende.

- (1) Es folgt aus der Formel (7.1.2) und aus [36, prop. II.3.4], dass  $\sigma'$  nicht identisch verschwindet.
- (2) Bei  $[0 : 1] \in \mathbb{P}_1$  gilt  $\sigma([0 : 1]) \in f^*(T_{\gamma(\Delta)}) \subset f^*(F)$ . Insbesondere gilt  $\sigma'([0 : 1]) = 0$ .
- (3) Wenn  $z$  eine lokale Koordinate um  $\mathbb{P}_1$  um  $[0 : 1]$  ist, dann folgt aus der Orthogonalität (7.1.1), dass  $\frac{\partial}{\partial z}|_{[0:1]} \in f^*(F)$  und  $\sigma([0 : 1]) \in f^*(F')$  orthogonal bezüglich des nicht-entarteten O'Neill Tensors sind.

Die Punkte (2) und (3) stellen sicher, dass wir die Proposition 6.2.2 auf die Familie  $\beta_t$  anwenden können. Da der Schnitt  $\sigma'$  nicht vollständig verschwindet, sagt die Proposition, dass  $\sigma'$  bei  $[0 : 1]$  eine Nullstelle von Ordnung mindestens zwei haben muss. Andererseits ist  $\sigma'$  aber ein Schnitt in  $f^*(L)$ , und dieses Bündel hat Grad eins. Wir haben also einen Widerspruch erreicht, und der Beweis von Satz 7.1.3 ist damit erbracht.  $\square$

Es folgt, dass es nur zwei Arten von Kontaktmannigfaltigkeiten gibt, auf denen die Kontaktstruktur nicht eindeutig festgelegt ist.

**KOROLLAR 7.1.4** (Eindeutigkeit von Kontaktstrukturen). *Die Vermutung 5.4.5 von C. LeBrun über die Eindeutigkeit von Kontaktstrukturen ist richtig.*

*Wenn  $X$  irgendeine komplexe projektive Kontaktmannigfaltigkeit mit mehr als einer Kontaktstruktur ist, dann gilt entweder  $X \cong \mathbb{P}_{2n+1}$  oder  $X \cong \mathbb{P}(T_Y)$  für eine Mannigfaltigkeit  $Y$  deren Tangentialbündel  $T_Y$  Automorphismen besitzt.*

Wir verweisen auf [34, sect. 2.6] für eine Beschreibung der unterschiedlichen Kontaktstrukturen auf  $\mathbb{P}(T_Y)$ .

**BEWEIS.** Nach Demaillys Satz 5.5.3 ist das kanonische Bündel  $K_X$  nicht nef. Falls  $b_2(X) > 1$  ist, haben wir in Satz 5.5.4 gesehen, dass  $X \cong \mathbb{P}(T_Y)$  ist. Wir können daher ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $b_2(X) = 1$  und dass  $X$  deshalb Fano ist.

In dieser Situation zeigt der Satz 7.1.3, dass  $F$  kanonisch gegeben und deshalb insbesondere eindeutig ist.  $\square$

## 7.2. Die Injektivität der Tangentialabbildung $\tau_x$

Um die generische Injektivität der Tangentialabbildung zu zeigen, ist wesentlich mehr Arbeit nötig. Wir formalisieren das Hauptargument aus dem Beweis des Satzes 7.1.3 und konstruieren zunächst Schnitte im Rückzug von  $L$  auf die universelle Familie  $U_x$ . Der Autor hofft, dass diese Konstruktion später dabei helfen kann, die Frage nach der projektiven Normalität des Bildes der Tangentialabbildung zu klären.

**LEMMA 7.2.1.** *Wenn  $x \in X$  ein allgemeiner Punkt ist, dann gibt es einen natürlichen Vektorraummorphimus*

$$s : T_X|_x \rightarrow H^0(U_x, \iota_x^*(L)),$$

so dass die Gleichheit

$$s(\vec{v})|_{\sigma_\infty} = \iota_x^*(\theta(\vec{v}))$$

besteht<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Beachte dazu, dass  $\iota_x^*(L)|_{\sigma_\infty}$  trivial ist.

BEWEIS. Wenn  $\ell \in H_x$  eine beliebige Gerade ist, dann ist der Kern der Auswertungsabbildung

$$e : H^0(\ell, T_X|_\ell) \rightarrow T_X|_x$$

nach Korollar 6.2.4 in  $H^0(\ell, F|_\ell)$  enthalten. Weil das Vektorraumbündel  $T_X|_\ell$  nach Lemma 6.5.1 global erzeugt ist, ist die Abbildung  $e$  surjektiv, und wir erhalten einen Vektorraummorphimus

$$s_\ell : T_X|_x \rightarrow H^0(\ell, L|_\ell).$$

Eine elementare Überlegung, die wir dem Leser überlassen, zeigt, dass die Vereinigungen  $(s_\ell(\vec{v}))_{\ell \in H_x}$  für jeden Tangentialvektor  $\vec{v} \in T_X|_x$  einen Schnitt  $s(\vec{v}) \in H^0(U_x, \iota_x^*(L))$  liefert.  $\square$

Für spezielle Tangentialvektoren  $\vec{v}$  können wir den Schnitt  $s(\vec{v})$  näher beschreiben.

LEMMA 7.2.2. Wenn  $\sigma_\infty = \iota_x^{-1}(x) \subset U_x$  der Schnitt ist, der von  $\iota_x$  kontrahiert wird, und wenn  $\vec{v} \in F_x \setminus \{0\}$  ist, dann ist der zu  $s(\vec{v})$  gehörende Divisor gegeben als

$$\text{Div}(s(\vec{v})) = \sigma_\infty + k \cdot (\tau_x \circ \pi_x)^*(D)$$

wobei  $k \in \mathbb{N}^+$  und  $D \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F^*|_x)}(1)|$  die Vereinigung der Tangentialrichtungen in  $F|_x$  ist, die orthogonal zu  $\vec{v}$  sind.

BEWEIS. Weil der Rückzug  $\iota_x^*(L)$  die Fasern von  $\pi_x$  mit Multiplizität 1 schneidet und weil die Schnitte  $s(\vec{v})$  für  $\vec{v} \in F|_x$  auf jeden Fall auf  $\sigma_\infty \subset U_x$  verschwinden, ist es klar, dass  $\text{Div}(s(\vec{v}))$  von der Form  $\sigma_\infty + k \cdot \pi_x^*(D')$  sein muss, wenn wir zeigen, dass  $s(\vec{v})$  genau dann auf einer Gerade  $\ell \in H_x$  verschwindet, wenn  $\vec{v}$  und  $T_\ell|_x$  orthogonal sind. Äquivalent: das Lemma ist bewiesen, wenn jeder Schnitt  $\sigma \in H^0(\ell, T_X|_\ell)$  mit  $\sigma(x) = \vec{v}$  genau dann in  $H^0(\ell, F|_\ell)$  liegt, wenn die Orthogonalität gilt. Das ist aber genau die Aussage des Korollars 6.2.4.  $\square$

KOROLLAR 7.2.3. Die Abbildung  $s : T_X|_x \rightarrow H^0(U_x, \iota_x^*(L))$  ist injektiv und das lineare System  $|\iota_x^*(L)|$  ist basispunktfrei.

BEWEIS. Nach Lemma 7.2.2 ist die Einschränkung  $s|_{F|_x}$  injektiv, und der Basisort des linearen Untersystems  $(s(\vec{v}))_{\vec{v} \in F|_x}$  ist genau der kontrahierte Schnitt  $\sigma_\infty$ . Die Behauptung ist also bewiesen, wenn wir beobachten, dass für jeden Tangentialvektor  $\vec{v} \in T_X|_x$ , der nicht in  $F|_x$  liegt, der Schnitt  $s(\vec{v}) \in H^0(U_x, \iota_x^*(L))$  nicht auf  $\sigma_\infty$  verschwindet.  $\square$

PROPOSITION 7.2.4 (Injektivität der Tangentialabbildung). Die Tangentialabbildung  $\tau_x$  ist generisch injektiv, also birational auf das Bild.

BEWEIS. Wie zuvor werden wir einen Widerspruchsbeweis führen. Dazu fixieren wir einen generischen Punkt  $y \in \text{locus}(H_x)$ . Nach Satz 3.3.2 gibt es dann genau eine Kontaktgerade  $\ell_y$ , die  $x$  und  $y$  enthält. Wir nehmen an, dass  $\tau_x$  nicht generisch injektiv ist.

Wenn diese Annahme gilt, dann finden wir eine zweite Kontaktgerade  $\ell'_y \in H_y$ , die  $x$  nicht enthält, aber bei  $y$  tangential an  $\ell_y$  ist. Wir behaupten, dass  $\ell'_y \subset \text{locus}(H_x)$  ist. Weil  $\text{locus}(H_x)$  aber Legendresch ist, ist der Tangentialraum  $T_{\text{locus}(H_x)}$  bei  $y$  selbst-orthogonal; die Einschränkung  $N|_{T_{\text{locus}(H_x)}|_y}$  ist also identisch Null. Insbesondere gilt die Orthogonalität

$$T_{\ell'_y} \perp T_{\text{locus}(H_x)}|_y$$

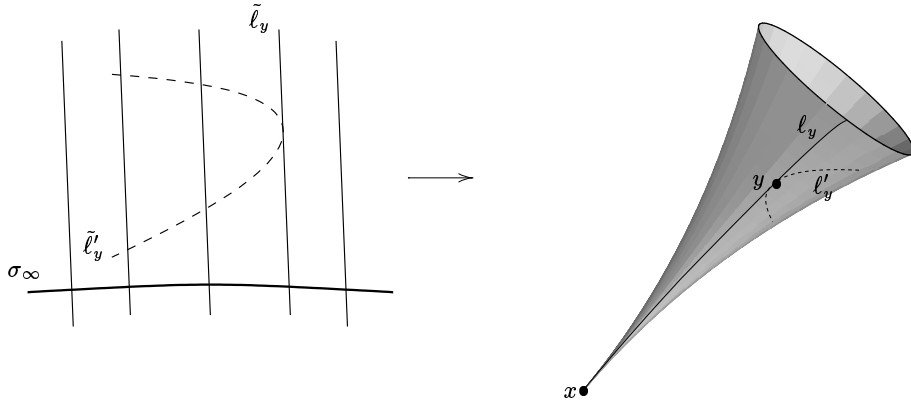


ABBILDUNG 7.2.1. Zum Beweis der Proposition 7.2.4

Dies erlaubt uns, die Proposition 6.2.2 anzuwenden. Wie zuvor wählen wir eine analytische offene Umgebung  $U_X \subset \text{locus}(H_x)$  und eine Liftung  $U_{\mathcal{H}} \subset \text{Hom}_{\text{bir}}(\mathbb{P}_1, X)$ , so dass der eingeschränkte universelle Morphismus

$$\begin{array}{ccc} \mu|_{U_{\mathcal{H}} \times \{[0:1]\}} : U_{\mathcal{H}} & \rightarrow & X \\ f & \mapsto & f([0:1]) \end{array}$$

einen Isomorphismus  $U_{\mathcal{H}} \rightarrow U$  induziert. Wir erkennen durch Anwendung der Proposition 6.2.2 und der Bemerkung 6.2.3, dass das Bild  $\mu(U_{\mathcal{H}} \times \mathbb{P}_1)$   $F$ -integral sein muss. Da  $\mu(U_{\mathcal{H}} \times \mathbb{P}_1)$  aber bereits die Legendresche Untermannigfaltigkeit  $U$  enthält, ergibt sich, dass  $\mu(U_{\mathcal{H}} \times \mathbb{P}_1) \subset \text{locus}(H_x)$  sein muss, und die Behauptung  $\ell'_y \subset \text{locus}(H_x)$  folgt.

Als nächsten Schritt betrachten wir die strikte Transformierte  $\tilde{\ell}'_y$  von  $\ell'_y$  in  $U_x$ . Diese Kurve ist keine Faser der Abbildung  $\pi_x : U_x \rightarrow H_x$ , weil  $\ell'_y$  den Punkt  $x$  nicht enthält. Die Kurve  $\tilde{\ell}'_y$  schneidet die strikte Transformierte  $\tilde{\ell}_y$  von  $\ell_y$  aber tangential im Urbild von  $y$ . Wir behaupten, dass dies nicht möglich ist, so dass ein Widerspruch erreicht ist.

Um diesen Widerspruch zu erkennen, beachten wir, dass  $\iota_x^*(L)$  die Kurve  $\tilde{\ell}'_y$  mit Multiplizität 1 schneidet, weil die Abbildung  $\iota_x : U_x \rightarrow \text{locus}(H_x)$  birational ist. Auf der anderen Seite können wir nach Lemma 7.2.2 einen Vektor  $\vec{v} \in T_X|_x$  finden, so dass der zugehörige Schnitt  $s(\vec{v}) \in H^0(U_x, \iota_x^*(L))$  zwar auf der Faser  $\tilde{\ell}_y$ , nicht aber auf der Kurve  $\tilde{\ell}'_y$  verschwindet. Also schneidet die Kurve  $\tilde{\ell}'_y$  den Divisor  $\text{Div}(s(\vec{v}))$  tangential, und die Schnittzahl kann nicht 1 sein.  $\square$

### 7.3. Die Normalisierung von $\text{locus}(H_x)$

Wir werden jetzt zeigen, dass die Normalisierung von  $\text{locus}(H_x)$  für einen allgemeinen Punkt  $x \in X$  stets isomorph zu einem Kegel ist.

**PROPOSITION 7.3.1.** *Wenn  $x \in X$  ein allgemeiner Punkt ist, dann ist die Normalisierung  $\widehat{\text{locus}(H_x)}$  von  $\text{locus}(H_x)$  ein Kegel.*

BEWEIS. Das Ziel der jetzt folgenden Argumentation ist es, ein Kriterium von J. Wahl [46] anzuwenden: eine projektive, normale Varietät ist ein Kegel, wenn es ein Vektorfeld gibt, das auf einem amplem Divisor verschwindet. Wir werden eine  $\mathbb{C}^*$ -Wirkung auf  $\widetilde{\text{locus}(H_x)}$  konstruieren, die auf einem Cartier-Divisor  $D$  verschwindet, der den Rückzug  $\eta^*(L)$  erzeugt und deshalb ample ist.

Dazu wählen wir einen Tangentialvektor  $\vec{v} \in T_X|_x$ , der nicht in  $F|_x$  enthalten ist und erhalten nach Lemma 7.2.1 einen Schnitt  $s(\vec{v}) \in H^0(U_x, \iota^*(U_x))$ . Weil  $\iota^*(L)$  die Fasern von  $\pi_x$  mit Multiplizität 1 schneidet, und weil  $\iota^*(L)|_{\sigma_\infty}$  trivial ist, ist der zugehörige Divisor  $\text{Div}(s(\vec{v})) \in \text{Div}(U_x)$  ein Schnitt  $\sigma_0 \subset U_x$ , der disjunkt zu  $\sigma_\infty$  ist. Diese beiden disjunkten Schnitte erlauben uns, ein Geradenbündel  $G \in \text{Pic}(H_x)$  zu finden, so dass  $U_x \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{H_x} \oplus G)$  ist<sup>2</sup>. Diese direkte Summenzerlegung liefert eine  $\mathbb{C}^*$ -Wirkung auf  $U_x$ , die die Schnitte  $\sigma_0$  und  $\sigma_\infty$  punktweise fixiert; dazu lassen wir  $\mathbb{C}^*$  durch Homothetien auf den ersten Summanden  $\mathcal{O}_{H_x}$  wirken.

Die Auswertungsabbildung  $\iota_x$  faktorisiert nach der universellen Eigenschaft der Normalisierung wie folgt:

$$U_x \xrightarrow{\alpha} \widetilde{\text{locus}(H_x)} \xrightarrow[\text{Normalisierung}]{\eta} \text{locus}(H_x) \subset X$$

$\iota_x$

Weil die Auswertungsabbildung  $\iota_x$  nach Korollar 6.5.2 außerhalb von  $\sigma_\infty$  bereits immersiv ist, entspricht die Faktorisierung  $\iota_x = \eta \circ \alpha$  gerade der Stein-Faktorisierung von  $\iota_x$ , und der Morphismus  $\alpha$  ist außerhalb von  $\sigma_\infty$  sogar isomorph.

In dieser Situation liefert der Satz [21, I.1.6, prop. 2] eine  $\mathbb{C}^*$ -Wirkung auf  $\widetilde{\text{locus}(H_x)}$ , so dass  $\alpha$  äquivariant ist. Diese Wirkung wird das Bild  $\alpha(\sigma_0)$  also wieder punktweise fixieren.

Wir erinnern daran, dass  $\alpha$  nach Korollar 6.5.2 in einer Umgebung von  $\sigma_0$  isomorph ist. Also ist  $\alpha(\sigma_0)$  im glatten Ort von  $\widetilde{\text{locus}(H_x)}$  enthalten und demnach Cartier. Konsequenz: das Geradenbündel  $\mathcal{O}_{\widetilde{\text{locus}(H_x)}}(\alpha(\sigma_0))$  ist isomorph zu dem amplem Geradenbündel  $\eta^*(L)$ , und der Beweis ist erbracht.  $\square$

<sup>2</sup>Wir erinnern daran, dass  $H_x$  nach Korollar 6.5.2 glatt ist.



## Literaturverzeichnis

- [1] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1984.
- [2] G. Barthel and L. Kaup. *Sur la Topologie des Surfaces complexes compactes*, chapter in *Topologie des surfaces complexes compactes singulières*, pages 61–297. Number 80 in *Semin. Math. Super.* Les Presses de l’université de Montréal, 1982.
- [3] A. Beauville. Fano contact manifolds and nilpotent orbits. *Comm. Math. Helv.*, 73(4):566–583, 1998.
- [4] A. Beauville. Riemannian holonomy and algebraic geometry. LANL-Preprint math.AG/9902110, 1999.
- [5] M. Beltrametti and A. Sommese. *The Adjunction Theory of Complex Projective Varieties*. de Gruyter, 1995.
- [6] M. Berger. Sur les groupes d’holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes. *Bull. Soc. Math. France*, 83:279–330, 1955.
- [7] K. Cho and E. Sato. Smooth projective varieties with ample vector bundle  $\bigwedge^2 t_x$  in any characteristic. *J. Math. Kyoto Univ.*, 35:1–33, 1995.
- [8] G. de Rham. Sur la réductibilité d’un espace de riemann. *Comment. Math. Helv.*, 26:328–344, 1952.
- [9] J.-P. Demailly. On the frobenius integrability of certain holomorphic  $p$ -forms. LANL-Preprint math.AG/0004067, 2000.
- [10] S. Druel. Structures de contact sur les variétés algébriques de dimension 5. *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math.*, 327(4):365–368, 1998.
- [11] S. Druel. Structures de contact sur les variétés toriques. *Math. Ann.*, 313(3):429–435, 1999.
- [12] P.A. Griffiths E. Arbarello, M. Cornalba and J. Harris. *Geometry of algebraic curves. Volume I.*, volume 267 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1985.
- [13] D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1995.
- [14] J. Fogarty and D. Mumford. *Geometric Invariant Theory*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer, 2nd edition, 1982.
- [15] T. Fujita. Remarks on quasi-polarized varieties. *Nagoya Math. J.*, 115:105–123, 1989.
- [16] R.V. Gamkrelidze, editor. *Geometry I: basic ideas and concepts of differential geometry*. Number 28 in *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1991.
- [17] L. O’Carroll H. Flenner and W. Vogel. *Joins and intersections*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 1999.
- [18] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1977.
- [19] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, volume 80 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, 1978.
- [20] H. Hofer. Dynamics, topology and holomorphic curves. *Doc. Math., J. DMV*, Extra Vol. ICM Berlin 1998, vol. 1:255–280, 1998.
- [21] A. Huckleberry and E. Oeljeklaus. *Classification Theorems for Almost Homogeneous Spaces*. Number 9 in *Revue de l’Institut Élie Cartan*. Université de Nancy, Institut Élie Cartan, 1984.
- [22] J.-M. Hwang. Geometry of minimal rational curves on fano manifolds. Lectures at the “School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry” held at the ICTP, Trieste, Italy. April 2000. To appear as ICTP Lecture Note on the ICTP’s web site at [http://www.ictp.trieste.it/~pub\\_off/services](http://www.ictp.trieste.it/~pub_off/services).
- [23] J.-M. Hwang. Rigidity of homogeneous contact manifolds under fano deformation. *J. Reine Angew. Math.*, 486:153–163, 1997.
- [24] J.-M. Hwang and N. Mok. Rigidity of irreducible hermitian symmetric spaces of the compact type under kähler deformation. *Invent. Math.*, 2(131):393–418, 1998.

- [25] J.-M. Hwang and N. Mok. Holomorphic maps from rational homogeneous spaces of picard number 1 onto projective manifolds. *Invent. Math.*, 136:209–231, 1999.
- [26] J.-M. Hwang and N. Mok. Varieties of minimal rational tangents on uniruled manifolds. In M. Schneider and Y.-T. Siu, editors, *Several complex variables*, number 37 in MSRI Publications, pages 351–389. Cambridge University Press, 2000.
- [27] Y. Miyaoka J. Kollár and S. Mori. Rational connectedness and boundedness of fano manifolds. *J. Diff. Geom.*, pages 765–769, 1992.
- [28] Y. Miyaoka K. Cho and N.I. Shepherd-Barron. Characterizations of projective spaces and applications. Preprint, October 2000.
- [29] Y. Kachi and E. Sato. Polarized varieties whose points are joined by rational curves of small degrees. *Illinois J. Math.*, 43(2):350–390, 1999.
- [30] S. Kebekus. Bounds for families of singular rational curves. In F. Sakai, editor, *Proceedings of the Saitama Mini-Conference for Algebraic Geometry*, Saitama University, Urawa, 2000.
- [31] S. Kebekus. Families of singular rational curves. LANL-Preprint math.AG/0004023, to appear in *J. Alg. Geom.*, 2000.
- [32] S. Kebekus. Projective bundles of singular plane cubics. LANL-Preprint math.AG/0009083, 2000.
- [33] S. Kebekus. Uniqueness of complex contact structures. LANL-Preprint math.AG/0004103. To appear in *Crelle's Journal*, 2000.
- [34] S. Kebekus, T. Peternell, A. Sommese, and J. Wiśniewski. Projective contact manifolds. *Invent. Math.*, 142(1):1–15, 2000.
- [35] S. Kobayashi and T. Ochiai. Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics. *J. Math. Kyoto Univ.*, 13:31–47, 1973.
- [36] J. Kollár. *Rational Curves on Algebraic Varieties*, volume 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge*. Springer, 1996.
- [37] J. Kollár and S. Mori. Classification of three-dimensional flips. *J. Amer. Math. Soc.*, 5, 1992.
- [38] H. Kraft. *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, volume D1 of *Aspekte der Mathematik*. Vieweg, 2., durchges. Aufl. edition, 1985.
- [39] C. LeBrun. Fano manifolds, contact structures and quaternionic geometry. *Int. Journ. of Maths.*, 6(3):419–437, 1995.
- [40] C. LeBrun. Twistors for tourists: A pocket guide for algebraic geometers. In J. Kollár et al, editor, *Algebraic Geometry*, volume 62(2) of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pages 361–385, Santa Cruz, 1995. American Mathematical Society.
- [41] C. LeBrun and S. Salomon. Strong rigidity of positive quaternion-kähler manifolds. *Invent. Math.*, 118(1):109–132, 1994.
- [42] E. Ballico M. Andreatta and J. Wiśniewski. Two theorems on elementary contractions. *Math. Ann.*, 297(2):191–198, 1993.
- [43] S. Mori. Projective manifolds with ample tangent bundles. *Ann. of Math.*, 110:593–606, 1979.
- [44] S. Mori. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. *Ann. of Math., II. Ser.*, 116:133–176, 1982.
- [45] S. Salamon. Quaternionic kähler manifolds. *Invent. Math.*, 67:143–171, 1982.
- [46] J. Wahl. A cohomological characterization of  $\mathbb{P}^n$ . *Invent. Math.*, 72:315–322, 1983.
- [47] F. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois and London, 1971.
- [48] J.A. Wolf. Complex homogeneous contact structures and quaternionic symmetric spaces. *J. Math. Mech.*, 14:1033–1047, 1965.
- [49] Y.-G. Ye. A note on complex projective threefolds admitting holomorphic contact structures. *Invent. Math.*, 115:311–314, 1994.



# Index

- Allgemeiner Punkt bzgl. eines Geradenbündels, 16, 17, 22  
Arnold, Vladimir, 49  
Auswertungsmorphismus  $\iota$ , 7, 8, 25, 28, 61, 71  
  Definition, 7  
Auswertungsmorphismus  $\iota_x$ , 8, 28, 31, 63, 64, 68–71  
  auf Kontaktmannigfaltigkeiten, 63  
  für Familien von Kontaktgeraden, 64  
  ist endlich, 11  
  Kriterium für Birationalität, 30  
  Miyaokas Kriterium für Birationalität, 28  
Beauville, Arnaud, 56  
Bend-and-Break, 2, 10, 11, 15, 27, 30, 31, 57  
Berger, Marcel, 50, 51  
Cartan, Élie, 49  
Charakterisierung  
  von  $\mathbb{P}(T_Y)$ , 56  
  von  $\mathbb{P}^n$ , 2, 30  
  von projektiven Bündeln von singulären Kurven, 3, 38  
Cho, Koji, 30  
Chow-Varietät, 66  
Darboux, 53, 62  
Demailly, Jean-Pierre, 55–57, 68  
de Rham, George, 50  
Druel, Stephane, 56  
Elementare Transformation, 35–37, 39, 40, 43  
Eliashberg, Yakov, 4  
Erwartete Dimension von  $\text{Hom}_{\text{bir}}(C, X)$ , 6  
Existenzsatz für rationale Kurven, 1, 5, 25, 56, 57  
 $F$ -integrale Kurve, 53, 58, 67  
  Deformationen von —, 58–60  
 $F$ -integraler Unterraum, 53, 58, 61, 66, 67, 70  
Fano-Mannigfaltigkeit, 1, 2, 5, 25, 30, 58, 68  
Frankel, T.T., 1, 5, 31  
Frobenius, 53, 62, 66  
Glattheit der Kontaktgeraden, 61  
Glattheitssatz, 10, 64  
Grothendieck, Alexandre, 27, 63  
Hartshorne, Robin, 1, 5, 27, 31  
Hartshorne-Vermutung, 1, 5, 31  
Hartshornes Zusammenhangssatz, 27  
Helmke, Stefan, 4, 41  
Hofer, Helmut, 49  
Holonomiegruppe, 3, 49–51  
  reduzierte, 50  
Holonomieprinzip, 50  
 $\text{Hom}_{\text{bir}}(C, X)$ , 5–6, 62  
  erwartete Dimension, 6  
  Tangententialraum des —, 6  
 $\text{Hom}_{\text{bir}}(C, X, c \mapsto x)$ , 6  
  Tangententialraum des —, 6  
 $\text{Hom}_{\text{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ , 6–9, 60, 61, 67, 70  
  Abschätzung für die Dimension, 6  
  Glattheit, 9  
 $\text{Hom}_{\text{bir}}(\mathbb{P}^1, X, [0 : 1] \mapsto x)$ , 6, 8, 9, 27, 57, 60, 61  
  Glattheit, 9  
Homogener rationaler Raum, 1, 55  
Hwang, Jun-Muk, 4, 27  
Hyperebenenfeld, 3, 49, 51–53, 58, 65  
Hyperkählersche Mannigfaltigkeit, 50, 51  
Hyperoskulierender Punkt, *siehe* Oskulierender Punkt  
Immersierte Kurve, 16, 17, 21, 22, 25, 26, 28, 29  
Inverse elementare Transformation, 36  
Inzidenzvarietät  $V$ , 65–67  
 $\iota$ , *siehe* Auswertungsmorphismus  
 $\iota_x$ , *siehe* Auswertungsmorphismus  
Irreduzible Riemannsche Mannigfaltigkeit, 50  
Kähler-Einsteinsche Metrik, 51  
  auf Kontaktmannigfaltigkeiten, 55  
Kählersche Mannigfaltigkeiten, 50  
Kachi, Yasuyuki, 30  
Kirillov, A., 55  
Kobayashi, Shoshichi, 30  
Kompaktheitssatz, 10, 25, 57  
Kontaktform  $\theta$ , 52, 53, 58–60, 63, 67  
Kontaktgerade, 58

- Deformationen von —, 60
- Familie überdeckt  $X$ , 61
- ist  $F$ -integral, 58
- Regularität der —, 61
- Spaltungstyp des Tangentialbündels, 63
- Kontaktmannigfaltigkeit, 3, 4, 49, 51, 52
  - Definition, 52
- Kontaktstruktur
  - auf  $\mathbb{P}(T_Y)$ , 55
  - auf  $\mathbb{P}_{2n+1}$ , 54
  - auf projektivierten Orbiten, 55
- Kostant, Bertram, 55
- Kostant-Kirillovsche symplektische Struktur, 55
- Kovács, Sándor, 4
- Kuspidale Kurve, 15, 16, 21, 22, 32, 38, 41–43, 62
- $L$ -oskulierender Punkt, *siehe* Oskulierender Punkt
- Lagrangesch, *siehe* Legendresch
- LeBrun, Claude, 3, 55, 65, 68
- Legendresch, 53, 57, 61–63, 69, 70
- Lie-Klammer, 52, 59
- locus( $H_x$ ), *siehe* Ort der Kurven durch einen Punkt
- Miyaoka, Yoichi, 2–4, 12, 28, 30
- Miyaokas Existenzsatz für singuläre Kurven, 28
- Mok, Ngaiming, 27
- Mori, Shigefumi, 1, 2, 4, 5, 7, 10, 11, 15, 25, 27, 30, 31, 56, 57
- Mori-Theorie, 1, 56
- Mumford, David, 7
- Nicht-immersierte Kurve, *siehe* Immersierte Kurve
- Nicht-spaltende Familie, *siehe* Spaltende Familie von rationalen Kurven
- Nodale Kurve, 15, 16, 18, 21–23, 26, 28, 32, 33, 36, 38, 41, 42, 45, 62
- Normalisierung
  - der Familie  $H_x$ , 9
  - eines Bündels in positiver Charakteristik, 12
  - eines Bündels von rationalen Kurven, 11
  - von locus( $H_x$ ), 65, 70
- O'Neill-Tensor, 52, 53, 59, 60, 67, 68
- Ochiai, Takushiro, 30
- Ort der Kurven durch einen Punkt, locus( $H_x$ ), 7, 11, 28, 57, 58, 61, 64–66, 69–71
  - Definition, 7
  - Deformationen durch Bewegung des Basispunktes, 65
  - ist Legendresch, 61
  - Normalisierung, 70
- Oskulierender
  - Ort in einem Bündel, 38, 40–43
  - Punkt auf einer ebenen Kubik, 16, 23, 41, 42, 45, 62
- Paralleltransport, 49
- Partielle Auflösung von Singularitäten, 18–21
- Peternell, Thomas, 4, 56
- Prim Fano-Mannigfaltigkeit, 1, 58
- Quasi-homogene Mannigfaltigkeit, 56
- Quaternion-Kählersche Mannigfaltigkeit, 3, 50, 51, 55
- RatCurves<sup>n</sup>( $X$ ), 7–10, 15, 25, 30, 32, 57, 58
  - Kompaktheit der Komponenten, 10
  - Konstruktion, 7
- RatCurves<sup>n</sup>( $x, X$ )
  - RatCurves<sup>n</sup>( $x, X$ ), 27
- RatCurves<sup>n</sup>( $x, X$ ), 8–11
  - Glattheit, 9
  - Kompaktheit, 10
  - Konstruktion, 8
  - Vergleich mit RatCurves<sup>n</sup>( $X$ ), 8
- Raum der rationalen Kurven, *siehe* RatCurves<sup>n</sup>( $X$ )
- Regelfläche, 21, 23, 29, 35, 36
- Ricci-flache Kählersche Mannigfaltigkeit, 50
- Salamon, Simon, 51, 55
- Sato, Eiichi, 30
- Satz von Darboux, 53, 62
- Schreyer, Frank-Olaf, 4
- Sehr allgemeiner Punkt, 8
- Seidenbergs Theorem, 12
- Shepherd-Barron, Nicolas, 30
- Singuläre ebene Kubik, 15
- Skalare Krümmung auf Einstein-Räumen, 51
- Sommese, Andrew J., 56
- Spaltende Familie von rationalen Kurven, 2, 10
- Spaltungskriterium
  - für singuläre Kurven, 2, 3, 15, 17, 21, 25, 26, 30, 35
  - von Mori, *siehe* Bend-and-Break
- Standard-Kontaktstruktur, 53
- Standardkurve, 63, 64
- Symmetrische Räume, 50
- Symplektifizierung der Kontaktstruktur, 54
- Tangentialabbildung  $\tau_x$ , 2, 3, 27, 28, 31
  - auf Kontaktmannigfaltigkeiten, 3, 4
  - für Familien von Kontaktgeraden, 63–66, 68, 69
  - ist ein endlicher Morphismus, 27
- Teilbarkeit der Picard-Gruppe in gewissen Bündeln, 40
- Teilbarkeit von  $K_X$ 
  - auf Kontaktmannigfaltigkeiten, 53
  - charakterisiert  $\mathbb{P}_n$ , 30
- Trunksucht, 54
- Twistorraum, 3, 51, 56
  - über Wolf-Räumen, 55

- Universelle Familie  $\text{Univ}^{rc}(X)$ , 7, 25  
Universelle Familie  $\text{Univ}^{rc}(x, X)$ , 8  
Universeller Morphismus  $\mu$ , 5, 7, 9, 60–63, 67, 70  
 $\text{Univ}^{rc}(X)$ , *siehe* Universelle Familie  
 $\text{Univ}^{rc}(X)$ , 61
- Wahl, Jonathan, 71  
Wiśniewski, Jarosław A., 56  
Wolf, Joseph A., 51  
Wolf-Räume, 51
- Ye, Yun-Guang, 56
- Zariski, Oskar, 9, 31  
Zerlegungssatz für Riemannsche Mannigfaltigkeiten, 50