Normale Untergruppen

Erinnerung: Sei k ein Körper, sei V ein k-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein UVR. Dann gibt es Quot. V/U mit linearen Abb. $q: V \twoheadrightarrow V/U$ so dass $\ker(q) = U$.

Frage Geht das auch für Gruppen? Gegeb. Gruppe G und Untergr. $H \leq G$ gibt es dann Quot.gruppe G/H mit Gruppenmorph. $q: G \to G/H$ s.d. $\ker(q) = H$

$$\underbrace{\ker(q)}_{= \{ g \in G \mid \, q(g) = \text{neutr. El. von } G/H \}} = H$$

Antwort NEIN! Nicht alle Untergruppen können Kern eines Gruppenmorph. sein!

Beob: Wenn es Gruppenmorph $\varphi: G \to Q$ gibt mit $H = \ker(\varphi)$, dann gilt $\forall h \in H: \forall g \in G:$

$$\varphi(g \cdot h \cdot g^{-1}) = \varphi(g) \cdot \cancel{\underbrace{\varphi(h)}_{= e}} \cdot \varphi(g)^{-1} = e_Q$$

Also: $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$.

Beob Sei $G = GL_2(\mathbb{C})$; $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}$.

Sei $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann: $g \cdot h \cdot g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin H$.

Def Sei G Gruppe, sei $H \leq G$ eine Untergruppe. Nenne H normal oder Normalteiler falls $\forall h \in H: \forall g \in G: \; g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$.

Fakt Falls $H \leq G$ normal ist, dann existiert ein Quotient.