Beweis des Hilbertschen Basissatzes   ich zeige $R[x]$ nicht Noethersch $\Rightarrow R$ nicht Noethersch.

Sei also $R[x]$ nicht Noethersch, sei also $I \subset R[x]$ ein Ideal, das nicht endl. erzeugt werden kann.

- Wähle f_1 ein Polynom kleinsten Grades in I. Dann $(f_1) \subsetneq I$
- Wähle $f_2 \in I \setminus (f_1)$ von min. Grad. Dann $(f_1, f_2) \subsetneq I$

$\vdots$

Gegeben ~~W~~ Index i, setze $n_i = \deg(f_i)$; $a_i =$ Leitkoeff. von f_i

Wegen Minimalität ist $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots$

Beh Die Kette von Idealen in R

$$(a_1) \subseteq (a_1, a_2) \subseteq (a_1, a_2, a_3) \subseteq \dots$$

wird nicht stationär. Also ist R nicht Noethersch.

Wäre nämlich k ein Index mit $(a_1, \dots, a_k) = (a_1, \dots, a_k, a_{k+1})$, dann kann ich schreiben

$$a_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot a_i \quad \text{mit geeigneten } b_i \in R$$

Dann betr.

$$g := \underset{\notin (f_1, \dots, f_k)}{f_{k+1}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{k} b_i \cdot a_i \cdot x^{n_{k+1} - n_i} \cdot f_i}_{\in (f_1, \dots, f_k)} \in I \setminus (f_1, \dots, f_k)$$

andererseits heben sich die Leitkoeff weg, also $\deg g < \deg f_{k+1}$ $\lightning$

$\square$