Beweis von Satz 10.4.2

① Sei $I \subset R$ ein Ideal, dann ist $\varphi(I) \subset S$ ein Ideal.

nicht leer ✓

addition ✓

Ideal-Eigenschaft: Sei $a \in S$, sei $b \in \varphi(I)$. Muss zeigen: $a \cdot b \in \varphi(I)$.

Wissen: $\exists\, a' \in R: \ \varphi(a') = a$

$\exists\, b' \in I: \ \varphi(b') = b$

$$\Rightarrow \quad a \cdot b = \varphi(a') \cdot \varphi(b') = \varphi(\overset{\in I}{a' \cdot b'}) \in \varphi(I)$$

② Überlegen Sie sich: wohldefiniert?

<u>Brob</u> Sei $a + \varphi^{-1}(J) \in R/\varphi^{-1}(J)$ im ker, d.h.

$$\varphi(a) + J = 0 + J \quad \text{in } S/J$$

$\Leftrightarrow \ \varphi(a) \in J \ \Leftrightarrow \ a \in \varphi^{-1}(J). \ \Leftrightarrow \ a + \varphi^{-1}(J) = 0$ in $R/\varphi^{-1}(J)$

<u>Also</u> ker $= 0$, die Abb. ist injektiv.

<u>Bew</u> Sei ein Elt. $b + J$ in S/J gegeben. Wissen: φ ist surjektiv, also $\exists\, a \in R: \ \varphi(a) = b$. Dann ist $b + J$ das Bild von $a + \varphi^{-1}(J)$ unter die Abb. Also: die Abb. ist surjektiv.

□