__Beweis von Satz 11.0.4__ Sei also $K$ ein Körper, betr. Abb.

$$\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow K$$

$$m \longmapsto \begin{cases} \underbrace{1_K + \dots + 1_K}_{m\,\times} & \text{falls } m \geq 0 \\ -(\underbrace{1_K + \dots + 1_K}_{-m\,\times}) & \text{falls } m < 0. \end{cases}$$

Nachrechnen: $\varphi$ ist ein Ringmorph. Bild$(\varphi)$ ist im Primkörper von $K$ enthalten.

__Fall__ $\varphi$ nicht injektiv, d.h. $\ker(\varphi) = (m)$ für ein $m > 0$. Dann ist

$$\text{Bild}(\varphi) \simeq \mathbb{Z}/_{(m)} \subseteq K.$$ Insbes. $\mathbb{Z}/_{(m)}$ ist Nullteilerfrei,

also ist $m$ eine Primzahl und $\mathbb{Z}/_{(m)} \simeq \mathbb{F}_m$. $\longleftarrow$ ist Körper, muss der Primkörper sein.

__Fall:__ $\varphi$ ist injektiv. Dann liefert die univ. Eigenschaft des Quotientenkörpers ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & Q(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Q} \\ \| & & \downarrow \exists\eta \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & K \end{array}$$

$\mathbb{Q}$

$\wr$

$\eta$ ist Morph. von Körpern, also injektiv, d.h. Bild$(\eta) \subseteq K$.

Also muss Bild$(\eta)$ der Primkörper sein. $\square$