Beweis von 12.2.1

(1) Jedes nicht-konst. Polynom $f \in K[x]$ hat Nst. in K

(2) Jedes ——— " ——— zerfällt

(3) $f \in K[x]$ irreduzibel $\Rightarrow$ f linear

(4) L/K alg. $\Rightarrow$

(1) $\Rightarrow$ (2) Sei nicht-konst. f gegeben. Nach (1): f hat Nullstelle $a \in K$. Dann zeigt Polynomdivision $f(x) = (x-a) \cdot f_1(x)$, wobei $f_1(x)$ kleineren Grad hat. Falls $f_1 \equiv$ konst ist $\Rightarrow$ fertig, ansonsten wiederhole den Prozess. Nach endlich ($= \deg f$)-vielen Schritten ist f als Prod. von linearen Polynomen dargestellt.

Beweis von 12.2.1

① Jedes nicht-konst. Polynom $f \in K[x]$ hat Nst. in K

② Jedes ——— " ——————— zerfällt

③ $f \in K[x]$ irreduzibel $\Rightarrow$ f linear

④ L/K alg. $\Rightarrow$

② $\Rightarrow$ ③ : f sei irreduzibel, kann also als Prod. von linearen Polynomen geschrieben werden, dabei ist jeder Faktor ein Teiler von f. Weil f irreduzibel ist, kann es nur einen Faktor geben.

Beweis von 12.2.1

(1) Jedes nicht-konst. Polynom $f \in K[x]$ hat Nst. in K

(2) Jedes —— " —————— zerfällt

(3) $f \in K[x]$ irreduzibel $\Rightarrow$ f linear

(4) L/K alg. $\Rightarrow$

(3) $\Rightarrow$ (4) Sei L/K algebraisch, sei $a \in L$ irgendein Elt, sei f das Minimalpolynom ($\Rightarrow$ f irreduzibel). Nach (3) f ist linear, also $[a : K] = \deg f = 1$ $\Rightarrow$ $a \in K$. $\Rightarrow$ $L = K$.

Beweis von 12.2.1

① Jedes nicht-konst. Polynom $f \in K[x]$ hat Nst. in K

② Jedes ——— " ——————— zerfällt

③ $f \in K[x]$ irreduzibel $\Rightarrow$ f linear

④ L/K alg. $\Rightarrow$

④ $\Rightarrow$ ① Sei $f \in K[x]$ nicht-konstant. Satz 12.1.2: es gibt alg. Erweiterung L/K s.d. f in L eine Nst. hat. ④ $\Rightarrow L = K$, also hat f in K eine Nullstelle.

$\square$