Beweis von Korollar 12.4.5 Seien $\bar{K}_1$ und $\bar{K}_2$ zwei alg. Abschlüsse von K.

Habe Abb:

$$\begin{tikzcd}
\bar{K}_1 \arrow[r, "\varphi"] & \bar{K}_2 \\
K \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[r, "\varphi_0 = \mathrm{Id}"'] & K \arrow[u, phantom, "\cup" description]
\end{tikzcd}$$

Dann sagt Satz 12.4.3: die Abb. φ_0 setzt fort zu Abb. / K-Morphismus

$\varphi: \bar{K}_1 \to \bar{K}_2$.

Wissen φ ist injektiv, weil Körpermorphismus

Beh φ ist auch surjektiv. Injektivität: $\mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq \bar{K}_2$ ist ein Unterkörper von $\bar{K}_2$ der isomorph zum alg. abg. Körper $\bar{K}_1$ ist. Also ist $\mathrm{Bild}(\varphi)$ ein alg. abg. Körper und $\bar{K}_2 / \mathrm{Bild}(\varphi)$ ist algebraisch, weil $\bar{K}_2 / K$ algebraisch ist.

Satz 12.2.1: $\bar{K}_2 = \mathrm{Bild}(\varphi)$, weil alg. abg. Körper keine alg Körpererweiterungen haben.

$\square$