Beweis 13.0.3 Sei $f \in K[x]$ nicht-konstant

(1) f besitzt Zerfällungskörper

Wähle einen alg. Abschluss $\overline{K}$ von K. Seien $a_1, \dots, a_n \in \overline{K}$ die Nullstellen von f. Dann ist

$$K(a_1, \dots, a_n)$$

ein Zerfällungskörper von f.

Beweis 13.0.3 Sei $f \in K[x]$ nicht konstant

(2) K_1/K und K_2/K Zerfällungskörper, dann gibt es K-Isomorph. $K_1 \to K_2$

Wähle alg. Abschluss $\overline{K}$ von K und bezeichne mit $a_1 - a_n \in \overline{K}$ die Nullstellen von f. Universelle Eigenschaft von $\overline{K}$:

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \xrightarrow{\exists \varphi} & \overline{K} \\ \cup & & \cup \\ K & \xrightarrow[\varphi_0 = \mathrm{Id}_K]{} & K \end{array}$$

Jetzt gilt: (1) φ ist injektiv, weil Körpermorphismus.

(2) φ bildet die Nullstellen von f auf die $a_1, \dots, a_n$ ab.

(3) $\mathrm{Bild}(\varphi) = K(a_1, \dots, a_n)$

Also: $K_1 \simeq K(a_1, - a_n)$; ebenso mit K_2.

Beweis 13.0.3 Sei $f \in K[x]$ nicht-konstant

③ L ein Zerfällungskörper $\Rightarrow$ $[L : K] \leq n!$

Wir können OE annehmen, dass $L = K(a_1, \dots, a_n) \subset \bar{K}$

Wissen $[a_1 : K] \leq \deg f$ ← weil f ein Polynom mit a_1 als Nst.

$[a_2 : K(a_1)] \leq (\deg f) - 1$ ← weil $f/(x-a_1) \in K(a_1)[x]$ ein Polynom mit a_2 als Nst. ist

$\vdots$

Am Ende

$$[K(a_1, \dots, a_n) : K] \leq (\deg f)(\deg f - 1)(\dots) = (\deg f)!$$

$\square$