## Beweis von Satz 14.4.5

**Vorbereitung:** Wähle $a_1 - a_t \in L$: $L = K(a_1 - a_t)$

**Setze**

$$L_0 := K$$

$$L_1 := K(a_1)$$

$$\vdots$$

$$L_i := K(a_1 - a_i)$$

$$n_i := [L_i : L_{i-1}]$$

**Wissen**

- $n = n_1 \cdots n_t$
- $\overline{K} = \overline{L_1} = \overline{L_2} = \dots = \overline{L_t} = \overline{L}$

Beweis von (1) durch Induktion nach $t$

Ind. start: $t = 0$, d.h. $L = K$. Hier ist nichts zu zeigen.

Ind. schritt: Sei $t > 0$, sei die Beh. für kleinere Zahlen schon bewiesen, d.h.

es gibt $\leq (n_1 \cdots n_{t-1})$ $K$-Morphismen $\sigma : L_{t-1} \to \overline{K}$.

Lemma 14.4.4: Für jedes solche $\sigma$ gibt es ~~genau~~ $\leq n_t$ viele Fortsetzung zu

$K$-Morph. $L_t = L \to \overline{K}$. Macht insgesamt $(n_1 \cdots n_{t-1}) \cdot n_t$ viele

Fortsetzungen.

Beweis von (2) Separabel $\Rightarrow$ das Min. polynom von jedem $a_i$ über $L_{i-1}$ hat exakt $n_i$-viele Nullstellen in $\overline{K}$, also haben wir im Beweis von (1) an jeder Stelle Gleichheit. („=" statt „$\leq$").

Inseparabel $\Rightarrow$ Können OE die $a_1 - a_t$ so wählen, dass $a_1$ insep. über $K$ ist. dann hat das Min. polynom weniger als $n_1$ Nullstellen in $\overline{K}$, also gibt es $< n_1$ viele $K$-Morph. $L_1 \to \overline{K}$, und im weiteren Beweis gilt stets strikte Ungleichheit.

$\square$