Beweis von 14.4.12

Richtung 1 ⇒ 2 Werde die Auss. beweisen „Frob. nicht surj. ⇒ K unvollkommen"

Sei: $K^p \subsetneq K$, d.h. $\exists\, a \in K \setminus K^p$. Sei $\alpha \in \overline{K}$ eine Nst. von $x^p - a \in K[x]$

Dann ist klar, dass $\alpha \notin K$

Weiter ist $f = x^p - a = x^p - \alpha^p = (x-\alpha)^p$ ← Also hat Polynom f nur eine einzige Nst!

$\Rightarrow$ $K(\alpha)/K$ ist alg. aber nicht separabel !

Richtung 2 ⇒ 1 Widerspruchsbeweis: ang. Frob. wäre surjektiv, $f \in K[x]$ wäre irreduzibel und inseparabel.

Dann: es gibt p-Potenz $q = p^e$ (← nat. Zahl) und

$$f(x) = g(x^q) = \sum_j \beta_j (x^q)^j$$

Frob. ist surj. $\Rightarrow$ $\exists\, \alpha_j \in K$: $\alpha_j^q = \beta_j$

Dann

$$f(x) = \sum \beta_j (x^q)^j = \sum \alpha_j^q (x^q)^j \overset{\text{Linearität des Frob.}}{=} \left(\sum \alpha_j x^j\right)^q$$

$\Rightarrow$ f ist ~~ir~~ reduzibel ↯ zur Annahme ! □