Beweis von Satz 15.2.4

1 ⇒ 2 Wähle Erzeugendensystem $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, d.h. $L = K((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$

Weiter sei $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ die zugehörigen Minimalpolynome. Wissen: alle Nst ~~v~~ aller f_λ liegen ebenfalls in L. Also

$$L = K(\text{alle Nst. aller } f_\lambda)$$

Beweis $2 \Rightarrow 3$ Seien Polynome $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ wie in (2) gegeben. Seien $(a_\mu)_{\mu \in M}$ die gesammelten Nst. der (f_λ). Wenn $\sigma: L \to \overline{L}$ ein K-Morphismus ist, wenn a_μ gegeben ist und wenn f_λ ein Polynom ist mit $f_\lambda(a_\mu) = 0$

Dann: $\sigma(a_\mu)$ ist wieder eine Nullstelle von $f_\lambda \in K[x]$, weil σ ein K-Morphismus ist. Also: $\sigma(a_\mu) \in L$ für alle $\mu \in M$. Also: $\sigma(L) \subset L$.

Mussen noch zeigen: $\sigma(L) = L \iff \forall \mu \in M$: a_μ ist im Bild von σ

Sei also ein a_μ gegeben, sei f_λ ein zugeh. Polynom. Dann wissen wir: f_λ hat endl. viele Nst. in $\overline{L}$, die inj. Abb. σ bildet Nst. auf Nst. ab. Also liegt jede Nst. von f_λ im Bild, also auch a_μ.

Beweis $3 \Rightarrow 1$ Will zeigen L/K ist normal. Sei $f \in K[x]$ irreduzibel mit Nullstelle $\overset{a}{\smile}$ in L.

Müssen zeigen: dann liegt jede andere Nst. von f in $\overline{K}$ ebenfalls in L.

Sei also b eine solche Nullstelle.

Wissen schon: es gibt K-Morphismus

$$\sigma_0 : K(a) \to K(b) \subseteq \overline{L}$$

Beweis von Lem. 14.4.4!

$$K(a) = K[x] / \text{Min. Poly. von } a$$

der a auf b abbildet.

Ausserdem: univ Eigenschaft des alg. Abschlusses: kann σ_0 fortsetzen zu K-Morph.

$$\sigma : L \to \overline{L}$$

Dann $b \in \text{Bild}(\sigma_0) \subseteq \text{Bild}(\sigma)$ und per Annahme (3)

ist $\text{Bild}(\sigma) = L$. Also: $b \in L$.

$\square$