Beweis von 15.2.7 (Existenz der normalen Hülle)

Schritt 1 Sei $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Erzeugendensystem von L/K, sei $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ die Menge der Minimalpolynome, sei

$$N := K(\text{alle Nullstellen aller } f_\lambda \text{ in } \overline{K})$$

Dann ist N/K normal nach Satz 15.2.4.

Schritt 2 Sei $N \supseteq Z \supseteq L$ ein Zwischenkörper, so dass Z/K normal ist.
Dann Z enthält alle a_λ (... weil diese ja schon in L liegen) und weil Z/K normal ist, enthält Z ~~gel~~ auch alle anderen Nullstellen der f_λ
$\Rightarrow$ $Z = N$.

Schritt 3 Sei ein $\tilde{N}$ wie im Satz „Zusätzlich gilt ..." gegeben. Nach univ. Eigenschaft des alg. Abschlusses gibt es einen L-Morphismus

$$\sigma : \tilde{N} \to \overline{L}$$

Das $\operatorname{Bild}(\sigma) \simeq \tilde{N}$ und $\operatorname{Bild}(\sigma)$ ist normal über K

$\Rightarrow$ $\sigma(\tilde{N})$ enthält ebenfalls alle Nullstellen aller f_λ, also $\sigma(\tilde{N}) \supseteq N$

Nach Eigenschaft (2) ist also $\sigma(\tilde{N}) = N$. $\square$

$$\begin{array}{c} \sigma(\tilde{N}) \\ \wr\! \mid \\ \tilde{N} \end{array}$$