Beweis von 15.3.1 (Charakterisierung von Galois-Erweiterungen)

Beweis $1 \Rightarrow 2$ Nach Satz 15.2.6 ist L/K der Zerfällungskörper eines einzelnen Polynoms $f \in K[x]$. Die irred. Faktoren von f sind Minimalpolynome von geeigneten Nullstellen von f. Also sind die irred. Faktoren separabel, denn alle Elte. von L sind se. über K. $\Rightarrow f$ ist separabel

Beweis $2 \Rightarrow 1$ Zerfällungskörper eines Polynoms sind immer normal. Zerfällungskörper eines sep. Polynoms sind separabel, weil sie durch Adjunktion sep. Elemente entstehen.

Beweis $1 \Leftarrow 3$ Sei $\bar{L}$ der alg. Abschluss von L. Die Automorphismen $\sigma \in Gal(L/K)$ lassen sich mit Hilfe der Einbettung $L \hookrightarrow \bar{L}$ als K-Morphismen

$$\sigma : L \to \bar{L} = \bar{K}$$

auffassen.

Wissen schon: es gibt max $[L : K]$ solche Morphismen, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn L/K separabel ist.

Wissen auch L/K ist genau dann normal, wenn für jeden K-Morph. $\tau : L \to \bar{L}$ gilt: $Bild(\tau) = L$ (d.h. τ entspricht einem Elt. der Galois-Gruppe $Gal(L/K)$)

Mit diesen beiden Aussagen ist die Implikation klar! $\square$