Beweis von Satz 15.3.6, Teil 3 + 4

Sei $f \in K[x]$ irred., sei $L \subset \overline{K}$ der Zerfällungskörper, s.d. $\mathrm{Gal}(f) = \mathrm{Gal}(L/K)$.

zu 3 Seien $a, b \in L$ Nullstellen von f. Dann wissen wir: es gibt Isomorphismen

$$
\begin{array}{ccccc}
K(a) & \longrightarrow & K[x]/(f) & \longleftarrow & K(b) \\
a & \longmapsto & x \quad\quad x & \longleftarrow & b
\end{array}
$$

Also: haben Isomorphismus

$$\sigma_0 : K(a) \longrightarrow K(b) \subset \overline{K} \qquad \text{mit} \qquad \sigma_0(a) = b.$$

Univ. Eigenschaft von $\overline{K}$ (Satz 12.4.3): es gibt Fortsetzung zu

$$\sigma : L \to \overline{K} \qquad \text{mit} \quad \sigma(a) = b.$$

Nun ist L/K ist normal, d.h. nach 15.2.4: $\sigma(L) = L$.

Also liefert σ ein Elt. von $\mathrm{Gal}(f)$, welches a auf b abbildet. $\square$

zu 4 Sei a eine Nst. von f. Dann: $[K(a):K] = \deg f$ und dies ist ein Teiler von $[L:K] \underset{15.3.1.3}{=} \# \mathrm{Gal}(f)$ $\square$