Beweis von Satz 16.1.5: linearer Unabhängigkeit von Charaktern

Beweis mit Induktion nach n = Anzahl der Charaktere

Induktionsstart: $n=1$ Da ist nichts zu zeigen.

Ind. schritt Seien $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ und $a_1 \dots a_n \in L$ gegeben wie im Satz und sei die Beh. für kleinere Mengen von Charaktern schon bewiesen. Müssen zeigen: alle $a_i = 0$.

Wir haben die Gleichung

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sigma_i(y) = 0 \qquad \forall y \in H.$$

Wissen: $\sigma_1 \neq \sigma_n$, also es existiert $z \in H$: $\sigma_1(z) \neq \sigma_n(z)$.

Erhalten neue Gleichungen

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \, \sigma_n(z) \cdot \sigma_i(y) = 0 \qquad \forall y \in H \qquad \dots \quad (1) \text{ mit } \sigma_n(z) \text{ mult.}$$

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \, \sigma_i(z \cdot y) = 0 \qquad \forall y \in H \qquad \dots \quad \text{folgt aus } (1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \, \sigma_i(z) \cdot \sigma_i(y)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sigma_n(z) - \sigma_i(z) \right) \cdot \sigma_i(y) = 0 \qquad \forall y \in H$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} a_i \left(\sigma_n(z) - \sigma_i(z) \right) \cdot \sigma_i(y)$$

I.A.

$$\Rightarrow \quad \forall i = 1 \dots n-1 \text{ gilt } a_i \cdot \left(\sigma_n(z) - \sigma_i(z) \right) = 0$$

nach Wahl von z: $\sigma_n(z) \neq \sigma_1(z) \Rightarrow \boxed{a_1 = 0.}$

Analog folgt: alle $a_i = 0$ für $i = 1 \dots n$ $\square$