Beweis von Satz 16.1.2 (Satz von Emil Artin) L ein Körper, $G \subset \mathrm{Aut}(L)$ eine endl. Untergruppe. $K := \mathrm{Fix}(G)$. Wollen zeigen: L/K ist Galois mit Gruppe G.

Klar $G \subseteq \mathrm{Gal}(L/K)$. Insbesondere $\# G \leq \# \mathrm{Gal}(L/K) \leq [L:K]$

Beob. 15.1.3.

Satz 15.3.1: um zu zeigen, dass L/K Galois ist, genügt es $\# G \geq [L:K]$

Äquivalent $\dim_K L \leq \# G$

Vorbereitung: Sei $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \subset \mathrm{Aut}(L)$

Ich betrachte die Abb. $S: L \to L; \quad a \mapsto \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(a)$

<u>Witz</u> Wenn $a \in L$ und ein $\sigma_j \in G$ gegeben ist, dann ist

Summen gleich, bis auf Reihenfolge der Summanden.

$$\sigma_j(S(a)) = \sigma_j\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(a)\right) = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_j \cdot \sigma_i)(a) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(a) = S(a)$$

Also: $\forall a \in L: \quad S(a) \in \mathrm{Fix}(G) = K$, d.h. S ist eine Abb.

$$S: L \to K.$$

Ich beob. auch: S ist <u>nicht</u> die Nullabbildung nach Satz über lineare Unabh. von Charakteren.

<u>Muss zeigen</u> $\dim_K L \leq n$ $\Leftrightarrow$ wenn $a_1, \dots, a_{n+1} \in L$ gegeben habe, dann sind diese K-linear abhängig. Seien also $a_1, \dots, a_{n+1} \in L$ gegeben.

Betrachte GLS:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sigma_i^{-1}(a_k) \cdot x_k = 0$$

n Gleichungen, für $i = 1 \dots n$

$(n+1)$ Variablen $x_1, \dots, x_{n+1}$

$\Rightarrow$ es existiert nicht-trivialer Lösungsvektor $(y_1 \dots y_{n+1}) \in L^{n+1}$

OE sei: $y_1 \neq 0$. Können den Lösungsvektor mit Skalaren aus L^* mult. und dann OE annehmen: $S(y_1) \neq 0$.

Wenden σ_i auf die i-te Gleichung an, erhalte

$$\sigma_i\left(\sum \sigma_i^{-1}(a_k) \cdot y_k \right) = \sum a_k \, \sigma_i(y_k) = 0$$

Summiere über K:

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \sum_i \sigma_i(y_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k \cdot S(y_k) = 0$$

ist K-Linearkomb. der $a_1 \dots a_{n+1}$

$S(y_1) \neq 0$, deshalb ist L.K. nicht trivial!

$\Rightarrow$ Die Menge $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ ist K-linear abhängig!

$\square$