Beweis von Satz 16.3.2 (Hauptsatz der Galois-Theorie)

1) Gegeben sei ein Zwischenkörper $K \subseteq Z \subseteq L$. Dann ist klar, dass

$\mathrm{Gal}(L/Z) \subseteq \mathrm{Gal}(L/K)$, denn jeder Z-Morph. ist ein K-Morphismus.

Gegeben eine Untergruppe: dann ist die Aussage in Satz 16.1.1 bewiesen.

2) Müssen zeigen

a) für jede Untergruppe $H < \mathrm{Gal}(L/Z)$ ist $H = \mathrm{Gal}(L/\mathrm{Fix}\, H)$

b) für jeden Zwischenkörper Z ist $Z = \mathrm{Fix}(\mathrm{Gal}(L/Z))$.

<u>zu a</u> Satz von Emil Artin, Satz 16.1.2.

<u>zu b</u> Klar: $Z \subseteq \mathrm{Fix}(\mathrm{Gal}(L/Z))$. Es ist

$$[L : \mathrm{Fix}(\mathrm{Gal}(L/Z))] \underset{\text{Artin}}{=} \# \mathrm{Gal}(L/Z) = [L:Z]$$

~~is~~ L/Z ist Galois

Bsp. 15.3.5.

3) Inklusionsumkehrung für Gruppen $H_1 \subseteq H_2$:

Klar: $\mathrm{Fix}(H_1) = \{ a \in L \mid \sigma(a) = a \quad \forall \sigma \in H_1 \}$.

$\supseteq \{ a \in L \mid \sigma(a) = a \quad \forall \sigma \in H_2 \}$. $= \mathrm{Fix}(H_2)$.

Indexumkehrung für Körper $Z_1 \subseteq Z_2$

Dann $[Z_2 : Z_1] \underset{\text{Gradformel Satz 3.6.1}}{=} \dfrac{[L : Z_1]}{[L : Z_2]} = \#\mathrm{Gal}(L/Z_1) \big/ \#\mathrm{Gal}(L/Z_2)$

$= [\mathrm{Gal}(L/Z_1) : \mathrm{Gal}(L/Z_2)]$

4) Gegeben sei Zwischenkörper Z und ein $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$.

Ich zeige zuerst

(1) $\sigma(Z) \subseteq \mathrm{Fix}\left(\sigma \cdot \mathrm{Gal}(L/Z) \cdot \sigma^{-1}\right)$

Sei ein $a \in \sigma(Z)$ und ein $\sigma \cdot \tau \cdot \sigma^{-1} \in \sigma\, \mathrm{Gal}(L/Z) \cdot \sigma^{-1}$ gegeben.

Schreibe $a = \sigma(b)$ und es ist

$$\sigma \tau \sigma^{-1}(a) = \sigma \tau \sigma^{-1} \sigma(b) = \sigma \underbrace{\tau}_{\in \mathrm{Gal}(L/Z)} (\overbrace{b}^{\in Z}) = \sigma(b) = a.$$

Zusätzlich ist

$$\# \sigma \, \mathrm{Gal}(L/Z) \cdot \sigma^{-1} = \# \mathrm{Gal}(L/Z) = [L : Z] = [L : \sigma(Z)]$$

Artin: $\sigma(Z) = \mathrm{Fix}(\sigma \cdot \mathrm{Gal}(L/Z) \cdot \sigma^{-1})$.

$\square$ (1-4).