Beweis des Hauptsatzes der Galois-Theorie, Teilaussage 5

Erinnerung: Gegeben Zwischenkörper Z, dann ist klar: Z/K ist separabel

Also:

Z/K ist Galoisch $\Leftrightarrow$ Z/K ist normal

$\Leftrightarrow$ für jeden K-Morph. $\tau : Z \to \bar{L}$ ist $\tau(Z) = Z$.
Satz 15.2.4

$\Leftrightarrow$ für jeden K-Morph. $\tau : L \to \bar{L}$ ist $\tau(Z) = Z$.
Satz 12.4.3
(Fortsetzung)

$\Leftrightarrow$ für jeden K-Morph. $\tau : L \to L$ ist $\tau(Z) = Z$
L/K normal
Satz 15.2.4

$\Leftrightarrow$ für jedes $\tau \in Gal(L/K)$ ist $\tau(Z) = Z$
def. von Gal.

$\Leftrightarrow$ für jedes $\tau \in Gal(L/K)$ ist $Gal(L/\tau(Z)) = Gal(L/Z)$
Teil 2

$\Leftrightarrow$ $\forall\ \tau \in Gal(L/K)$ ist $\tau \cdot Gal(L/Z) \cdot \tau^{-1} = Gal(L/Z)$
Teil 4

$\Leftrightarrow$ $Gal(L/K)$ ist normal in $Gal(L/K)$.
def.

Wir nehmen an: Z/K ist Galois, insbesondere normal. d.h. $\sigma(Z) = Z$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Also habe ich Einschränkungsabb.

$$\varphi : \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(Z/K)$$

Klar: jeder Morph. $Z \to Z \subset L$ kann fortgesetzt werden zu Morph. $L \to L$

Das bedeutet: φ ist surjektiv, also

$$\mathrm{Gal}(Z/K) \simeq \mathrm{Gal}(L/K) \big/ \ker(\varphi).$$

genau dann ~~in K.~~

Klar: Ein Morphismus $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ liegt in Kern von φ, falls $\sigma|_Z = \mathrm{Id}_Z$ ist, d.h. falls der K-Morphismus σ bereits ein Z-Morphismus ist.

Also: $\ker(\varphi) = \mathrm{Gal}(L/Z)$.

Insgesamt: $\mathrm{Gal}(Z/K) = \mathrm{Gal}(L/K) \big/ \mathrm{Gal}(L/Z)$ $\square$