Bewcis des ersten Sylow-Satzes: $|G| = p^n \cdot m$.

Vorbemerkung: Satz von Cauchy (18.1.2) sagt: es gibt in $G$ eine zykl. UG von Ord. $= p$.

Konsequenz: Es genügt, Teil (2) der Aussage zu zeigen, denn folgt (1) per trivialer Induktion.

Sei also Index $1 \leq i < n$ gegeben, sei $U \subseteq G$ eine Untergruppe von Ord. $p^i$.

Wissen: nach Lemm. 18.2.7:

$$0 \underset{\text{Annahme}}{\equiv} [G : U] \underset{18.2.7}{\equiv} [N(U) : U] \quad (\text{mod } p)$$

Betrachte Restklassengruppe

$$q : N(U) \twoheadrightarrow \underbrace{N(U)/U}_{\substack{\text{hier gibt es nach} \\ \text{Satz von Cauchy eine} \\ \text{zykl. UG } H \text{ von Ord. } p.}}$$

Dann ist $q^{-1}(H) \subseteq N(U) \subseteq G$ eine Untergruppe von Ordnung $p^{i+1}$, welche $U$ enthält. Außerdem ist $U$ normal in $q^{-1}(H)$, denn $q^{-1}(H)$ liegt im Normalisator von $U$.

$\square$