Beweis des dritten Sylow-Satzes

Müssen zeigen

① $s_p \mid |G|$

② $s_p \equiv 1 \pmod p$.

__Beweis von 1__ Betr. die Wirkung von G auf die Menge M der Untergruppen von G durch Konjugation ($\rightsquigarrow$ Beispiel 17.1.25)

Der zweite Sylow-Satz: je zwei Sylowgruppen sind zueinander konjugiert

$\Leftrightarrow$ die Menge der Sylowgruppen ist als Teilmenge von M exakt eine Bahn der G-Wirkung!

Bahngleichung (17.2.1): die $\underbrace{\text{Größe der Bahn}}_{= s_p}$ ist Teiler von $|G|$

<u>Beweis von ②</u> Wähle eine feste Sylowgruppe P. Diese Gruppe P wirkt auf die Menge der p-Sylowgruppen durch Konjugation

M

<u>Frage</u>: Wie viele Fixpunkte hat diese Wirkung?
Ich behaupte: es gibt nur einen Fixpunkt. Dann ist nach dem zentralen Schlüssellemma die Aussage ② bewiesen.

<u>Beob</u> Wenn eine p-Sylowgruppe Q fix ist unter dieser Wirkung, dann

$$\forall p \in P: \qquad p Q p^{-1} = Q \qquad \Rightarrow \qquad P \subset N(Q)$$

Haben also eine Gruppe $N(Q)$ mit zwei Untergruppen P, Q, die in $N(Q)$ p-Sylowgruppen sind. Nach dem 2. Sylowsatz sind die Gruppen in $N(Q)$ zueinander konjugiert. Das bedeutet:

$$\exists\, n \in N(Q): \qquad n Q n^{-1} = P$$

<u>Aber</u>: Q ist normal in $N(Q)$, d.h. $\forall n \in N(Q)$: $\quad n Q n^{-1} = Q$

$$\Rightarrow \quad Q = P.$$

Also hat die P-Wirkung auf der Menge der p-Sylowuntergruppen von G genau einen Fixpunkt.

$\square$