Beweis von Satz 20.1.5 (p-Gruppen sind auflösbar)

Sei G eine nicht-triv. p-Gruppe von Ordnung p^n

Erinnerung (Satz 18.2.3) G hat ein nicht-triviales Zentrum, die Ordnung von $Z(G)$ teilt $|G| = p^n$, ist also selbst eine p-Potenz.

Induktion nach n

Start: $n = 1$ Dann $G = Z(G)$, also ist G abelsch.

Schritt: Sei $n > 1$ Falls $G = Z(G)$, dann fertig. Sei also OE $Z(G) \subsetneq G$.

Dann betrachte Quotienten $G/Z(G)$. Das ist p-Gruppe, per Induktionsannahme auflösbar. Betr. Auflösungskette

$$G/Z(G) = \tilde{N}_\ell \supset \dots \supset \tilde{N}_1 = \{e\}$$

Setze $N_i = \varphi^{-1}(\tilde{N}_i)$, wo $1 \leq i \leq \ell$ und $\varphi: G \to G/Z(G)$ die Quotientenabb.

Wissen: ich erhalte auf diese Weise Kette von normalen Untergruppen von G

$$G = N_\ell \supset \dots \supset N_1 = Z(G) \supset N_0 := \{e\} \qquad (*)$$

Dann ist $\forall i$:

$$N_i / N_{i-1} \underset{\substack{\text{2. Noethersch} \\ \text{Iso. satz, 17.3.7}}}{=} \left. {}^{N_i/Z(G)} \middle/ {}_{N_{i-1}/Z(G)} \right. = \tilde{N}_i / \tilde{N}_{i-1} \quad \leftarrow \text{Abelsch.}$$

$\Rightarrow$ $(*)$ ist Auflösungskette für G, also ist G auflösbar. $\square$