Beweis von Satz 20.1.6 (Untergruppen & Quotienten)

Sei G auflösbar, mit Auflösungskette $G = N_\ell \supset \dots \supset N_0 = \{e\}$.

① Sei $U \subset G$ eine Untergruppe. Betr. Kette

$$U = (U \cap N_\ell) \supset \dots \supset (U \cap N_0) = \{e\}. \qquad (*)$$

Klar: das ist eine Kette von normalen UG von U. Außerdem: $\forall i$:

$$N_i \cap U / N_{i-1} \cap U = N_i \cap U / N_i \cap N_{i-1} \cap U \underset{\substack{\text{1. Noeth.} \\ \text{Iso.satz, 17.3.6}}}{\cong} \underbrace{(U \cap N_i) \cdot N_{i-1} / N_{i-1}}_{\substack{\text{Untergruppe von } N_i/N_{i-1} \\ \text{also Abelsch.}}}$$

$\Rightarrow$ $(*)$ ist eine Auflösungskette von U.

$\Rightarrow$ U ist auflösbar!

② Sei $\varphi: G \twoheadrightarrow Q$ eine Restklassengruppe. Dann betr.

$$Q = \varphi(N_\ell) \supset \dots \supset \varphi(N_0) = \{e\}$$

Das ist wieder Auflösungskette, denn nach Satz 17.3.4 ist das eine Kette von normalen UG. Abelsch-heit von den Quot. rechnet man nach. $\square$