Beweis von Satz 20.1.7 (gute Auflösungsketten)

zu ① Wissen schon (Satz 20.1.6) die Gruppen N und G/N sind auflösbar.

Wähle Auflösungsketten

$$N = N_\ell \supset \dots \supset N_0 = \{e\}$$

$$G/N = \tilde{N}_{\ell+k} \supset \dots \supset \tilde{N}_\ell = \{e\}$$

Betr. die Quotientenabb. $\varphi: G \to G/N$ und die Kette

$$G = \varphi^{-1}(\tilde{N}_{\ell+k}) \supset \dots \supset \varphi^{-1}(\tilde{N}_\ell) = N = N_\ell \supset \dots \supset N_0 = \{e\}.$$

Nachrechnen: dies ist Auflösungskette von G, in der die Gruppe N vorkommt.

zu ② Man kann jede Auflösungskette verfeinern, ~~in~~ indem man geeignete Zwischengruppen einfügt. Gegeben Kettenglied $N_i \supset N_{i+1}$, dann sagt der Satz von Cauchy: ex. in N_i/N_{i-1} eine Untergruppe ~~von~~ $\tilde{U}$ von Primzahlordnung. Dann betr. $N_i \supseteq \varphi^{-1}(\tilde{U}) \supseteq N_{i-1}$, wobei $\varphi: N_i \to N_i/N_{i+1}$. Rest ist Hausaufgabe.

□