Lemma 20.2.5 Sei $n \geq 5$, sei $N \trianglelefteq A_n$ normal und sei $\underbrace{(a\ b\ c)}_{=:\sigma} \in N$

Schritt 1 Sei $(a\ b\ d) \in A_n$ ein anderer 3-Zykel. Dann wähle $d' \notin \{a, b, c, d\}$ ist

(das geht, weil $n \geq 5$). Dann setze

$$\tau_1 = (a\ b)(c\ d') \qquad \tau_2 = (a\ b)(d'\ d)$$

Dann: $\tau_2 \cdot \tau_1 \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \tau_1^{-1} \cdot \tau_2^{-1} = (a\ b\ d)$ ist Element von N, weil N normal ist

Schritt 2 Wiederhole Schritt 1 um zu zeigen: jeder 3-Zykel liegt in N.

Schritt 3 Wenn $(\alpha\ \beta)(\gamma\ \delta)$ ein Produkt ist von 2 disjunkten Transpositionen, dann

$$(\alpha\beta)(\gamma\ \delta) = (\alpha\ \gamma\ \beta)(\alpha\ \gamma\ \delta)$$ liegt in N.

Schritt 4 Wenn $(\alpha\ \beta)(\beta\ \gamma)$ ein Produkt ist von 2 nicht-disjunkten Transpositionen,

dann ist $(\alpha\ \beta)(\beta\ \gamma) = (\alpha\ \beta\ \gamma)$ liegt in N!

Insgesamt Jedes Elt. von A_n lässt sich schreiben als Produkt von geradzahlig vielen Transpositionen $\rightsquigarrow$ liegt also nach Schritt 3+4 in N.

$$\Rightarrow N = A_n. \qquad \square$$