__Beweis von Satz 20.2.4__ Sei $n \geq 5$. Sei $\{e\} \subsetneq N \subseteq A_n$ eine normale UG.

Muss zeigen: $N = A_n$.

Wähle ein $\sigma \in N \setminus \{e\}$, das maximal viele Elte __nicht__ bewegt werden.

__Ziel__ Will zeigen, dass σ ein 3-Zykel ist, denn dann sagt Lemma 20.2.5: $N = A_n$.

__Fall 0__ σ bewegt genau 2 Elte. Dann ist eine Transposition, also nicht in A_n ↯

__Fall 1__ σ — " — 3 Elte. Dann ist σ ein 3-Zykel, fertig.

__Fall 2__ σ — " — 4 Elte. Dann wissen wir: σ ist __kein__ 4-Zykel, denn 4-Zykel sind ungerade Permutationen. Also ist σ von der Form $\sigma = (a\ b)(c\ d)$.

Wegen $n \geq 5$ gibt es ein $e \notin \{a, b, c, d\}$. Betr.

$\tau := (c\ d\ e)$

$\tilde{\sigma} := \tau \cdot \sigma \cdot \tau^{-1} = (a\ b)(d\ e)$ ⟵ liegt in N, weil N normal ist.

und $\tilde{\sigma}^{-1} \cdot \sigma = (d\ c\ e) \in N$. Widerspruch zur Wahl von σ!

Fall 3: σ bewegt mehr als 4 Elt. Dann schreibe σ als Prod. von disjunkten Zykeln, die so sortiert sind, dass die längsten Zykeln zuerst kommen.

z. B. $\sigma = (a\ b\ c\ d\ e)(f\ g)\cdots$

$\sigma = (a\ b)(c\ d)(e\ f)\cdots$

Setze $\tau := (b\ c\ d)$, $\bar{\sigma} := \tau \cdot \sigma \cdot \tau^{-1} \in N$ und beweise durch direktes Nachrechnen, dass

$$\bar{\sigma}^{-1} \cdot \sigma \text{ weniger Elt. bewegt als } \sigma!$$

Wieder: Widerspruch zur Wahl von σ; dieser Fall 3 tritt nicht auf. $\square$