Beweis von Satz 21.0.1, Teil I   Sei L/K einfach und algebraisch.

Sei also $a \in L$ ein Element, s.d. $L = K(a)$ ist. Sei $f \in K[x]$ das Minimalpolynom.

Beob Wenn $K \subset Z \subset L$ ein Zwischenkörper ist, dann sei $g_Z(x) \in Z[x]$ das Min. poly von a über Z. In $L[x]$ ist g_Z ein Teiler von f.

$\rightsquigarrow$ erhalte Abb.

$$\eta : \text{Zwischenkörper} \to \underbrace{\text{normierten Teiler von } f \in L[x]}_{\text{endl. Menge}}$$
$$Z \mapsto g_Z$$

Ich behaupte: η ist injektiv!
Dazu konstruiere ein teilweises Inverses.

$$\mu : \text{norm. Teiler von } f \text{ in } L[x] \to \text{Zwischenkörper}$$
$$\sum_{i=0}^{n} b_i x^i \mapsto K(b_0, \dots, b_n).$$

Ich behaupte: $\mu \circ \eta = \mathrm{Id}_{\text{Zwischenkörper}}$; insbesondere ist η injektiv!

Sei also ein Zwischenkörper Z gegeben, sei $g_Z = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ das Minimalpolynom von a über Z. Dann

$$\eta(Z) = g_Z \qquad \mu(\eta(Z)) = K(b_0 \dots b_n)$$

Ich muss zeigen: $K(b_0 \dots b_n) = Z$.

Klar: $g_Z \in Z[x]$, also alle $b_i \in Z \Rightarrow K(b_0 \dots b_n) \subseteq Z$

Wissen: $[a : K(b_0 \dots b_n)] = n$ $\rightsquigarrow$ Weil g_Z das min. Poly. von a über $K(b_0 \dots b_n)$ ist.

$[a : Z] = n$ $\rightsquigarrow$ —— " ——

Weil $L = K(a)$ ist, ist

$$[L : K(b_0 \dots b_n)] = [a : K(b_0 \dots b_n)] = n$$
$$= [a : Z] = [L : Z]$$

Produktregel $\rightsquigarrow$ $[Z : K(b_0 \dots b_n)] = 1$, also Gleichheit! $\square$