Beweis von Satz 21.0.1, Teil II. Sei L/K eine Erweiterung mit nur endl. vielen Zwischenkörpern.

Schritt 1a Die Erweiterung L/K ist algebraisch!

Widerspruchsbeweis: ang. $\exists\, a \in L$, das transz. über K. Dann wissen wir:

$$K(a) \cong K(x) \supsetneq K(x^2) \supsetneq K(x^4) \supsetneq \dots \supsetneq K$$

Also gibt es ∞ viele Zwischenkörper $L \supseteq K(a) \supseteq \cdot \supseteq K$, im Widerspruch zur Annahme!

Schritt 1b Die Erweiterung L/K ist endlich!

Beob dazu: wenn ich Folge $a_1, a_2, \dots$ von Elt. aus L gegeben habe, dann muss die Folge der Zwischenkörper

$$K \subseteq K(a_1) \subseteq K(a_1, a_2) \subseteq K(a_1, a_2, a_3) \subseteq \dots \subseteq L$$

stationär werden!

__Schritt 2__ Beweis der Einfachheit, falls $\# K < \infty$.

In diesem Fall ist $\# L < \infty$ und L^* ist zyklisch. Sei $a \in L^*$ ein primitives Element. Dann: $K(a) \supseteq L^*$, also $K(a) = L$, d.h. L/K ist einfach!

<u>Schritt 3:</u> Beweis im Fall, dass $\# K = \infty$.

Wissen L/K ist endlich, seien also $a_1 \dots a_n \in L$, s.d. $L = K(a_1, \dots a_n)$.

<u>Beob:</u> Für alle $\lambda \in K^*$, betrachte $K \subseteq K(a_1 + \lambda \cdot a_2) \subseteq L$

unendl. viele Elte!

Weil es unendl. viele $\lambda \in K^*$ gibt, aber nur endl. viele Zwischenkörper,

$\exists \; \lambda_1, \lambda_2 \in K: \quad K(a_1 + \lambda_1 \cdot a_2) = K(a_1 + \lambda_2 \cdot a_2) \quad$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Beob: $\underbrace{K(a_1 + \lambda_1 \cdot a_2)} \subseteq K(a_1, a_2)$

enthält $(a_1 + \lambda_1 \cdot a_2) - (a_1 + \lambda_2 \cdot a_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot a_2 \Rightarrow$ enthält auch a_2

enthält $\lambda_2(a + \lambda_1 a_2) - \lambda_1(a_1 + \lambda_2 \cdot a_2) = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot a \Rightarrow$ enthält auch a_1

Insgesamt: $\underline{K(a_1, a_2)} = K(a_1 + \lambda_1 \cdot a_2)$

Wende Trick induktiv an, zeige dass $K(a_1, \dots, a_n) = K(b)$,
wobei b eine geeignete K-Linearkombination von $a_1 \dots a_n$ ist. □