Beweis von Satz 22.4.1: positives Resultat zur Konstruierbarkeit!

Sei $[L:K] = 2^n$. Wissen: L/K ist Galois, also $\# \mathrm{Gal}(L/K) = [L:K] = 2^n$

Also ist G eine 2-Gruppe, also nach Satz 20.1.5 ist $\mathrm{Gal}(L/K)$ auflösbar.

Nach Satz 20.1.7 (oder nach Sylow I, Satz 18.3.1) gibt es Auflösungskette

$$\{1\} = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_\ell = \mathrm{Gal}(L/K) \quad \text{mit } [N_i : N_{i-1}] = 2 \quad \forall i.$$

Hauptsatz der Galoistheorie: 16.3.2: Dazu gehört Kette von Körpererweiterungen,

$$K = Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_\ell = L \quad \text{mit } [Z_i : Z_{i-1}] = 2 \quad \forall i$$

Korollar 3.6.4: $\forall i$: Z_i entsteht aus Z_{i-1} durch Adjunktion einer Quadratwurzel!

Aber: Quadratwurzeln lassen sich mit Zirkel & Lineal konstruieren!

$\square$