Beweis des Satzes von Gauß (22.4.3)

Die Frage ist: ist die primitive n-te EHW $\zeta = e^{2\pi i/n} \in \mathrm{Kons}(\{0,1\})$

Satz 8.1.4 & Satz 22.4.1: Das ist genau dann der Fall, falls

$$\underbrace{[\underbrace{\mathbb{Q}(\zeta)}_{= L_n} : \mathbb{Q}]}_{= \varphi(n) \,=\, \text{Euler } \varphi\text{-Funktion}} = \text{Zweierpotenz.}$$

Schreibe dazu n als Produkt von untersch. Primzahlen

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

Nach Satz 22.1.2 (mult. Eigenschaften von φ):

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_r^{\alpha_r - 1} (p_1 - 1) \cdots (p_r - 1)$$

Das ist eine Zweierpotenz genau dann, wenn folgendes gilt:

1. außer 2 darf jede Primzahl in n höchstens mit Exponenten 1 auftreten
2. jede der Zahlen p_i muss von der Gestalt $p_i = 2^{n_i} + 1$ sein.

$\square$