Beweis von 23.1.3: sei ein Element $a \in K^*$ gegeben; $f(x) = x^n - a \in K[x]$

sei L = Zerfällungskörper von f

α eine Nullstelle von f im Körper L

Dann wähle prim. n.te EHW $\xi \in K$.

Dann wissen wir

- L/K ist Galois
- Die Nullstellen von f in L sind $\{\alpha, \xi \cdot \alpha, \xi^2 \cdot \alpha, \dots, \xi^{n-1} \alpha\}$.

Konsequenz
Wenn $\sigma \in Gal(L/K)$ ein Element ist, dann $\exists\, k_\sigma \in \mathbb{Z}$, s.d $\sigma(\alpha) = \xi^{k_\sigma} \cdot \alpha$.

Beob Die Zahl k_σ ist wohldefiniert modulo n; also erhalte Abb.

$$\mu : Gal(L/K) \to \mathbb{Z}/(n)$$

$$\sigma \mapsto [k_\sigma]$$

Nachrechnen: das ist ein Gruppenmorphismus.

Konsequenz Ein Elt $\sigma \in Gal(L/K)$ ist eindt. durch das Bild $\sigma(\alpha)$ festgelegt.
Das bedeutet: die Abb μ ist injektiv, also ist $Gal(L/K)$ isomorph zu einer Untergruppe von $\mathbb{Z}/(n)$. Also ist $Gal(L/K)$ zyklisch. $\square$